CAPITOLO 3

FONDAMENTI DI ANALISI DELLA STABILITA' DI SISTEMI NON LINEARI

INTRODUZIONE

L'obbiettivo di questo capitolo è quello di presentare in modo sintetico ma completo, la teoria della stabilità per sistemi non lineari, dovuta a *Liapunov.* In particolare verranno presentati i concetti di: *sistema non lineare, punto di equilibrio, asintotica stabilità (locale e globale), metodo diretto di Liapunov, insieme invariante, principio di invarianza di LaSalle.*
I riferimenti necessari per questo capitolo sono tratti da [5bis].

3.1 SISTEMI NON LINEARI E PUNTI DI EQUILIBRIO

Un sistema dinamico non lineare può essere rappresentato da un insieme di equazioni differenziali non lineari nella forma:

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{3.1}$$

dove x è il vettore di stato di dimensione n e f è una funzione vettoriale non lineare di n componenti.
Una soluzione $x(t)$ del sistema di equazioni differenziali (3.1), corrisponde nello spazio di stato ad una curva detta *traiettoria di stato*.
In figura 3.1 si può osservare una possibile traiettoria $x(t)$ nello spazio di stato di dimensione 2 e corrispondentemente il movimento $(x(t),t)$ del sistema, che si distingue dalla traiettoria per il fatto che si sviluppa nello spazio degli eventi.
Si può notare che nell'equazione (3.1) non compare esplicitamente la variabile di controllo *u*, ma ciò è dovuto al fatto che tale equazione esprime la *dinamica di un sistema in anello chiuso retroazionato*, in cui quindi la variabile di controllo *u* dipende dallo stato x.

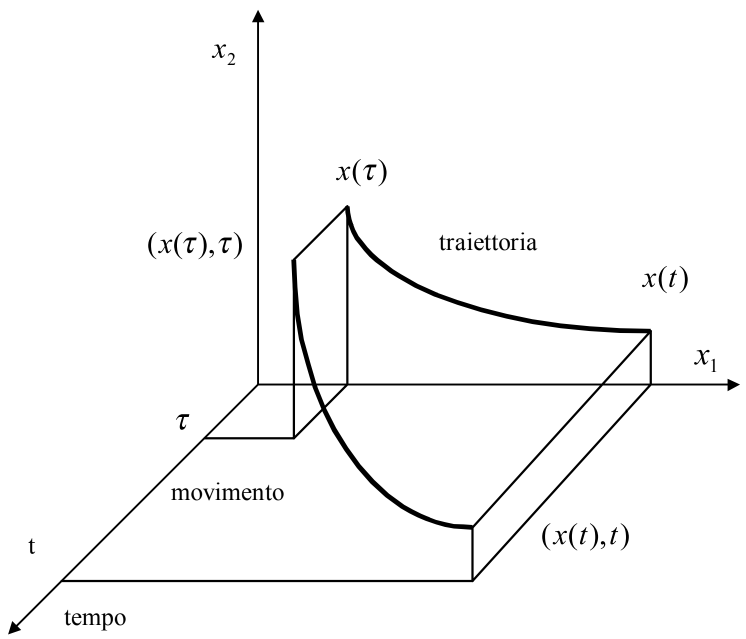

Figura 3.1 Traiettoria di Stato

Una classe particolare di sistemi non lineari è costituita dai *sistemi lineari*, la cui dinamica si riduce ad un prodotto matrice vettore: $\dot{x} = A(t)x$, con A di ordine $n \times n$.

Mentre i sistemi lineari vengono classificati come *varianti* o *invarianti* a seconda che la matrice A vari o no in funzione del tempo, per i sistemi non lineari ci si riferirà corrispondentemente a sistemi *autonomi* o *non autonomi*, pertanto il sistema di eq.(3.1) è detto autonomo se f non dipende esplicitamente dal tempo, e quindi si potrà scrivere:

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2}$$

Nel seguito di questo capitolo si farà riferimento solo a sistemi autonomi descritti dalla (3.2).

Un concetto importante per descrivere la stabilità di un sistema è lo *stato* o *punto di equilibrio*, definito come nel seguito:

Definizione 3.1: uno stato $\overline{x}$ è detto di *equilibrio* se una volta che $x(t)$ raggiunge $\overline{x}$, rimane in tale stato per tutti gli istanti successivi.

Matematicamente ciò significa che lo stato costante $\overline{x}$ verifica: $0 = f(\overline{x})$, e quindi risolvendo questa equazione si possono trovare i punti di equilibrio del sistema (3.2).

Spesso per semplicità si riconduce lo studio di un punto di equilibrio, allo studio dell'origine dello spazio di stato come punto di equilibrio di un sistema nelle nuove variabili $y = x - \bar{x}$ e quindi si studierà il sistema di equazione: $\dot{y} = f(y + \bar{x})$. Pertanto anziché analizzare il comportamento del sistema in un intorno di $\bar{x}$, potremo equivalentemente studiare il comportamento del nuovo sistema nelle variabili *y* in un intorno dell'origine, come faremo nel seguito del capitolo.

3.2 CONCETTO DI STABILITA'

Viene anzitutto introdotto la definizione di *Stabilità dell'Equilibrio* secondo *Liapunov*.

Definizione 3.2: lo stato di equilibrio $x = 0$ è detto essere *stabile* se:

$$\forall R > 0,\ \exists r > 0,\ \text{tale che: se } \|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R,\ \forall t \geq 0.$$

Altrimenti il punto di equilibrio è detto *instabile*.

Il senso di questa definizione di stabilità è che la traiettoria del sistema può essere mantenuta vicina all'origine, se lo stato del sistema all'istante iniziale è preso sufficientemente vicino ad essa, in questo modo il punto di equilibrio $x = 0$ è detto essere stabile.
Tale concetto di stabilità può essere troppo debole in molte applicazioni e per questo ci si riferisce spesso ad una sua estensione, cioè l'*asintotica stabilità*.

Definizione 3.3: lo stato di equilibrio $x = 0$ è *asintoticamente stabile*, se è stabile e se:

$$\exists r > 0,\ \text{tale che } \|x(0)\| < r \Rightarrow x(t) \to 0,\ \text{per } t \to \infty.$$

Il significato di asintotica stabilità è più forte di quello di semplice stabilità: infatti è richiesto alla traiettoria del sistema non solo di restare in un intorno dell'origine, ma di convergere ad essa per $t \to \infty$. La sfera $B(0, r)$ di centro 0 e raggio *r*, all'interno della quale preso un qualsiasi stato iniziale $x(0)$ è garantita la asintotica stabilità dell'origine, è detta *regione d'attrazione* del punto di equilibrio.

Le definizioni precedenti di stabilità sono formulate in modo da caratterizzare *localmente* il comportamento del sistema, in quanto si osserva come lo stato evolve nel tempo a partire da una condizione iniziale nell'intorno del punto di equilibrio.
Le proprietà locali di stabilità forniscono poche informazioni sul sistema qualora lo stato iniziale sia preso lontano dal punto di equilibrio. In questo caso è necessario una definizione in senso *globale* di stabilità.

Definizione 3.4: se per ogni valore $x(0)$ dello stato iniziale si ha asintotica stabilità, allora il punto di equilibrio è detto essere *asintoticamente stabile in grande*, oppure *asintoticamente stabile in senso globale*.

Per i sistemi lineari a tempo invariante (LTI), la stabilità asintotica è sempre globale, ciò che invece non è vero per i sistemi non lineari e che evidenzia l'importanza di questo concetto.

3.3 METODO DIRETTO DI LIAPUNOV

Questo metodo per l'analisi della stabilità di un sistema non lineare si basa sull'estensione di un principio fisico fondamentale dei sistemi, secondo il quale si afferma che:

> *se l'energia totale di un sistema meccanico (o elettrico) è continuamente dissipata, allora il sistema, lineare o non lineare, deve sicuramente tendere ad un punto di equilibrio.*

In questo modo si può verificare la stabilità di un sistema grazie al comportamento di una funzione scalare $V(x)$ che rappresenta in qualche modo l'energia totale del sistema; analizzandone la derivata rispetto al tempo, si è in grado di concludere se il sistema è stabile o instabile, senza ricorrere ad una esplicita soluzione delle equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$.

Esempio:
Si consideri un sistema massa-molla con un dispositivo smorzatore, la cui dinamica sia non lineare come descritto nella seguente equazione:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0 \tag{3.3}$$

dove $b\dot{x}|\dot{x}|$ rappresenta il termine di smorzamento non lineare e $(k_0 x + k_1 x^3)$ è la dinamica non lineare della molla.

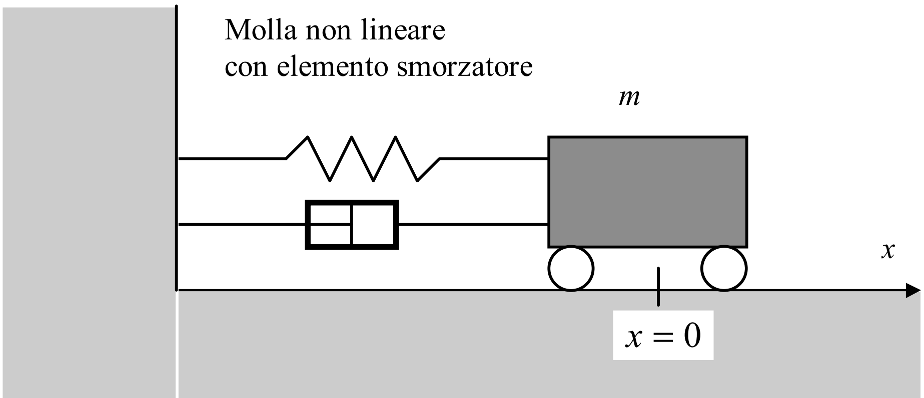

Figura 3.2 Dinamica di un sistema non lineare

Quando la massa *m* di figura 3.2, viene allontanata dalla posizione *x*=0 in cui la molla ha la sua lunghezza naturale, come risulterà il moto? Sarà stabile?
Una risposta che intendesse utilizzare la definizione di stabilità, incontrerebbe serie difficoltà, in quanto non è disponibile una soluzione dell'equazione non lineare sopra descritta e non si può pensare nemmeno di procedere ad una linearizzazione del sistema, avendo scelto una condizione iniziale al di fuori di un possibile intorno del punto di lavoro.
Si esamini allora l'energia meccanica del sistema, che è costituita dalla somma dell'*energia cinetica* e dell'*energia potenziale*, come evidenziato nella $V(x)$:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0 x + k_1 x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0 x^2 + \frac{1}{4}k_1 x^4 \ . \qquad (3.4)$$

Dall'energia meccanica in relazione alla nozione di stabilità, si possono estrapolare alcune proprietà:

- un valore nullo di energia corrisponde al punto di equilibrio ($x = 0, \dot{x} = 0$)
- la stabilità asintotica implica la convergenza a zero dell'energia meccanica
- l'instabilità è in relazione alla crescita dell'energia meccanica

Questo indica che il valore scalare $V(x)$ dell'energia meccanica, che è strettamente positivo per $x \neq 0, \dot{x} \neq 0$, riflette indirettamente l'ampiezza del vettore di stato, e inoltre le proprietà di stabilità del sistema possono essere caratterizzate dalla variazione di $V(x)$ ed è proprio per questo che è utile valutare la derivata temporale $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \qquad (3.5).$$

Questa espressione mostra che $\dot{V}(x)$ è non positiva per ogni possibile soluzione x dell'equazione della dinamica ciò che implica che l'energia meccanica $V(x)$ è decrescente monotona e quindi continuamente dissipata dalla componente smorzante fino a che $\dot{x} = 0$ e la massa si è posizionata alla lunghezza naturale della molla cioè a $x = 0$. Per l'applicazione del *metodo diretto di Liapunov*, è utile allora introdurre delle funzioni $V(x)$ scalari definite positive:

Definizione 3.5: una funzione scalare continua $V(x)$ è detta essere *localmente definita positiva*, se $V(0) = 0$ e nella sfera $B(0, R)$ si ha $x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$. Se questa proprietà vale su tutto lo spazio di stato, allora $V(x)$ è detta essere *globalmente definita positiva*.

Per esempio l'energia meccanica (3.3) del sistema massa-molla-smorzatore, è globalmente definita positiva e per la precedente definizione ciò implica l'esistenza di un unico minimo nell'origine.
Geometricamente si può osservare che una funzione $V(x)$ definita positiva in uno spazio di stato bidimensionale, assume in R^3 la forma di una campana rovesciata il cui minimo è nell'origine, vedi figura 3.3.

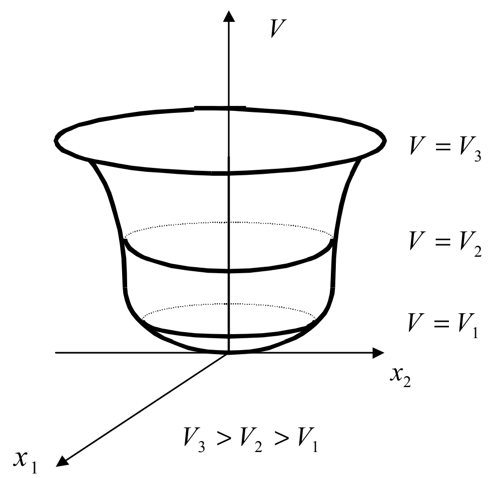

Figura 3.3: Tipica forma di una funzione definita positiva.

Una rappresentazione corrispondente nello spazio di stato la si ottiene invece tramite le *curve di livello*, le quali non sono altro che intersezioni della $V(x)$ con piani orizzontali di equazione $V(x) = \alpha$ con $\alpha > 0$. Per una funzione definita positiva tali curve di livello non sono altro che curve ovali centrate rispetto all'origine come si può vedere nella figura 3.4.

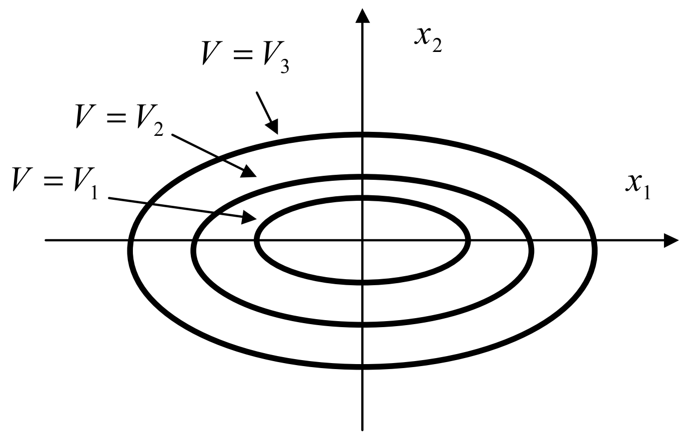

Figura 3.4: Curve di livello.

Si può osservare che la definizione 3.5 implicitamente fornisce anche la definizione di funzione definita negativa, in senso locale e globale, in quanto è lecito affermare che $V(x)$ è *definita negativa* se $-V(x)$ è *definita positiva*. Inoltre quando ci riferiremo a funzioni *semi-definite* positive, intenderemo che $V(0) = 0$ e $V(x) \geq 0$ per $x \neq 0$.

Nel caso in cui $V(x)$ sia differenziabile, la sua derivata rispetto al tempo vale :

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \qquad (3.6),$$

dove la derivata è detta essere calcolata lungo la traiettoria $x(t)$ del sistema, soluzione di $\dot{x} = f(x)$, ed è importante che sia semi-definita negativa.

Definizione 3.6: se nella sfera $B(0, R)$, la funzione $V(x)$ è definita positiva e ha derivate parziali continue e se $\dot{V}(x)$ calcolata lungo qualsiasi traiettoria dello stato del sistema $\dot{x} = f(x)$ è semi-definita negativa, ovvero $\dot{V}(x) \leq 0$, allora $V(x)$ è detta essere una *funzione di Liapunov*.

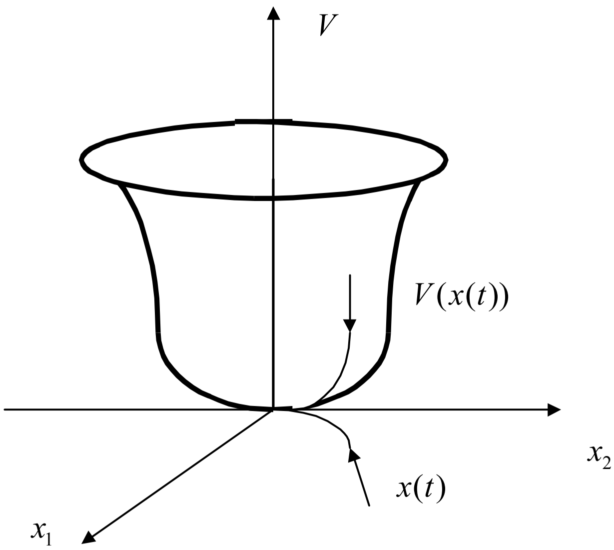

Figura 3.5 Tipica forma di una funzione definita positiva

Una funzione di Liapunov ha una semplice interpretazione geometrica nel caso dei sistemi del secondo ordine. Il fatto che lungo una traiettoria *x(t)* si abbia $\dot{V}(x) \leq 0$, implica come mostrato in figura 3.5 che la linea giacente sulla superficie V e corrispondente alla traiettoria $x(t)$, debba tendere verso l'origine dello spazio di stato.
A questo punto è possibile enunciare i criteri di stabilità per il punto di equilibrio $x = 0$, in senso locale e globale a seconda che la funzione di Liapunov sia localmente o globalmente definita positiva.

Teorema 3.1 di Stabilità Locale: se in una sfera $B(0, R)$ esiste una funzione $V(x)$ con derivate prime parziali continue tale che:

- $V(x)$ è definita positiva localmente in $B(0, R)$
- $\dot{V}(x)$ è semi-definita negativa localmente in $B(0, R)$

allora il punto di equilibrio $x = 0$ è *stabile* e se $\dot{V}(x)$ è localmente definita negativa, allora la stabilità locale è *asintotica*.

Per applicare questo teorema bisogna dapprima scegliere una funzione scalare definita negativa e successivamente calcolarne la derivata lungo la traiettoria dello stato del sistema.
Qualora si sia interessati alla *stabilità asintotica globale*, si dovrà supporre che le proprietà di definizione positiva di $V(x)$ e di definizione negativa di $\dot{V}(x)$, siano estese a tutto lo spazio dello

stato; sarà inoltre importante che la funzione di Liapunov sia *radialmente illimitata*, come enunciato nel seguente teorema.

Teorema 3.2 di Stabilità Globale: sia $V(.)$ funzione scalare dello stato x con derivate prime parziali continue, tale che

- $V(x)$ sia definita positiva
- $\dot{V}(x)$ sia definita negativa
- $V(x) \to \infty$ per $\|x\| \to \infty$ cioè radialmente illimitata

allora il punto di equilibrio $x = 0$ è *globalmente asintoticamente stabile*.

La ragione di ipotizzare funzioni scalari radialmente illimitate, sta nel fatto di poter sempre assicurare che le curve di livello, o le superfici di livello nel caso di sistemi di ordine superiore al secondo, siano chiuse. Se ciò non è verificato è possibile che le traiettorie dello stato si allontanino dal punto di equilibrio come mostrato nella figura 3.6.

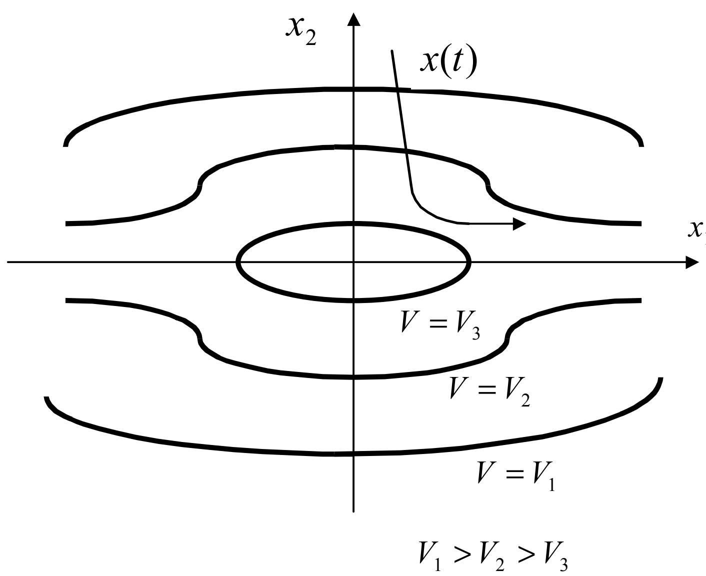

Figura 3.6 Motivazione della condizione di illimitatezza radiale

3.4 PRINCIPIO DI INVARIANZA DI LA SALLE

Solitamente di un sistema di controllo si vuole determinare l'asintotica stabilità. Spesso se si opera attraverso il metodo diretto di Liapunov è difficile stabilire se sia vera o no questa proprietà, in quanto anche se si giunge a definire una funzione di Liapunov $V(x)$, la $\dot{V}(x)$ corrispondente è solo semi-definita negativa e ciò non consente di concludere nulla sull'asintotica stabilità.
In questo tipo di situazione abbastanza comune, si sfrutta allora un'estensione della teoria di Liapunov dovuta a La Salle, la quale consente comunque di verificare la stabilità asintotica. A tal fine è fondamentale la nozione di *insieme invariante*.

Definizione 3.6: Un insieme *G* è detto *invariante* per un sistema dinamico se ogni traiettoria del sistema avente come stato iniziale un punto di *G*, rimane in *G* per ogni istante successivo.

Per esempio ogni punto di equilibrio è un insieme invariante, così come lo è il dominio di attrazione di un punto di equilibrio, e implicitamente l'intero spazio di stato è anch'esso un insieme invariante.
Il teorema che verrà ora enunciato riflette l'idea che una funzione di Liapunov comunque è inferiormente limitata e nell'intorno del punto di equilibrio la sua decrescita si annulla gradatamente, di fatti la derivata $\dot{V}(x)$ converge a zero.

Teorema 3.3: Considerato un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ con *f* continua e considerata $V(x)$ funzione scalare continua nelle derivate prime parziali, e tale che:

- per un qualche $l > 0$, sia Ω_l la regione definita da $V(x) < l$, limitata
- $\dot{V}(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \Omega_l$

Sia R l'insieme di tutti i punti appartenenti a Ω_l per i quali $\dot{V}(x) = 0$ ed M sia l'insieme invariante più grande contenuto in R, allora ogni soluzione $x(t)$ originata in Ω_l tende a M per $t \to \infty$.

L'importanza di questo teorema sta nell'affermare che una traiettoria di condizione iniziale presa all'interno di Ω_l ha convergenza asintotica verso il più grande insieme invariante *M,* se la $\dot{V}(x) = 0$ al suo interno.

Spesso risulta più utile del precedente teorema un suo corollario, tramite il quale è possibile dedurre l'asintotica stabilità locale del punto di equilibrio origine dello spazio di stato.

Corollario 3.4: Considerato un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ con f continua, e considerata $V(x)$ funzione scalare continua nelle derivate prime parziali, nell'ipotesi che in un intorno Ω dell'origine si abbia che:

- $V(x)$ definita positiva localmente
- $\dot{V}(x)$ semi-definita negativa
- R insieme definito da $\dot{V}(x) = 0$ non contenga traiettorie del sistema tranne la soluzione $x \equiv 0$

allora il punto di equilibrio $x = 0$ è asintoticamente stabile. Inoltre la più ampia regione connessa Ω_l definita da $V(x) < l$ contenuta in Ω, è un *dominio di attrazione* del punto di equilibrio.

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente si possono estendere questi risultati al caso globale, semplicemente allargando la regione in cui valgono le condizioni sopra descritte, a tutto lo spazio di stato e richiedendo che la funzione scalare $V(x)$ sia radialmente illimitata.

Teorema 3.5: Considerato un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ con f continua e considerata $V(x)$ funzione scalare continua nelle derivate prime parziali, si supponga che:

- $\dot{V}(x) \leq 0$ su tutto lo spazio di stato
- $V(x) \to \infty$ per $\|x\| \to \infty$

Se R è l'insieme di tutti i punti tali che $\dot{V}(x) = 0$ ed M il più grande insieme invariante contenuto in R, allora tutte le soluzioni convergono in modo *globalmente asintotico* a M per $t \to \infty$.

Le definizioni e i risultati introdotti ora, verranno utilizzati e applicati nel capitolo 4, con lo scopo di dimostrare la globale asintotica stabilità del controllo di posizione con compensazione diretta della coppia gravitazionale, applicato ad un manipolatore robotico a n giunti, la cui dinamica è stata presentata nel secondo capitolo.