

appunti di fisica 1

basati su note di A. Agnesi e A. M. Malvezzi

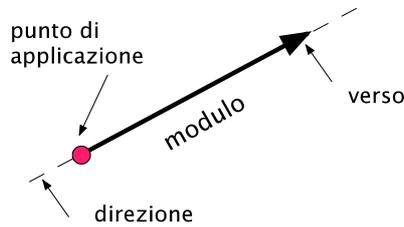
gennaio 2010

Avvertenza: queste note illustrano in forma compatta e compiuta alcuni aspetti fondamentali e critici del corso. Esse non coprono in alcun modo la totalità dei temi affrontati durante le lezioni o le esercitazioni. Per questi aspetti si rimanda al programma ufficiale dei corsi di fisica 1.

I Introduzione

I 1. calcolo vettoriale

vettore: insieme di tre entità



- modulo (numero reale >0)
- direzione
- verso

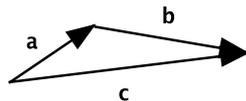
Il vettore non cambia al cambiare del punto di applicazione.

nomenclatura: \mathbf{a} , \vec{a} , \underline{a} ; $|\mathbf{a}|$ = modulo di \mathbf{a} ; $\hat{\mathbf{b}}$ = vettore di modulo unitario \equiv versore.

Nei testi i vettori sono in grassetto, le quantità scalari (numeri) in carattere normale.

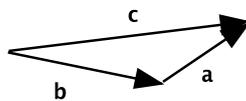
Nella scrittura manuale si usa \vec{a} oppure \underline{a} per i vettori, caratteri normali per gli scalari: attenzione a non confondere vettori e scalari!

proprietà dei vettori:



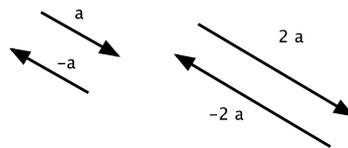
somma: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

(proprietà commutativa)

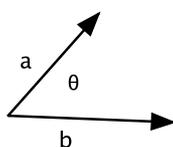


moltiplicazione per un numero (scalare):

$$\mathbf{b} = q \mathbf{a} = \begin{cases} |\mathbf{b}| = q |\mathbf{a}| & \text{se } q \geq 0 \\ |\mathbf{b}| = -q |\mathbf{a}| & \text{se } q < 0 \text{ ed il verso cambia} \end{cases}$$



prodotto scalare: $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $c = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta$ c è un numero reale (e non un vettore).



$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \quad c = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta$$

In particolare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ allora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$

vale la proprietà distributiva rispetto alla somma:

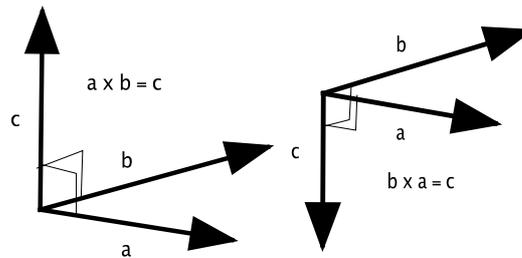
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

prodotto vettoriale: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$; \mathbf{c} si ottiene dalle seguenti regole:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

quindi vale la regola del cavatappi per il verso di \mathbf{c} , ovvero " \mathbf{a} , \mathbf{b} , e \mathbf{c} sono ordinatamente congruenti ad una terna destrorsa di assi cartesiani "



proprietà:

proprietà distributiva rispetto alla somma

anticommutatività: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ allora $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ regola del triplo prodotto vettoriale

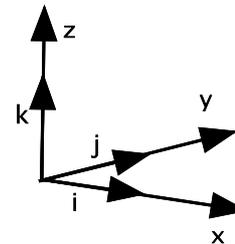
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

I 2. rappresentazione dei vettori

Le proprietà dei vettori sono indipendenti dal sistema di riferimento utilizzato.

Le operazioni sui vettori dipendono però dal sistema di riferimento utilizzato.

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale



Ad ogni asse si associa un versore $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ordinatamente all'asse x, y, z . I versori sono vettori a modulo unitario. $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$.

Considero ora un vettore \mathbf{a} applicato all'origine O degli assi: siano $\alpha, \beta,$ e γ gli angoli che esso forma con gli assi $x, y,$ e $z,$ rispettivamente. Le componenti del vettore \mathbf{a} lungo i tre assi sono definite dalle relazioni:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{a}| \cos \alpha = a_x; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{a}| \cos \beta = a_y; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{a}| \cos \gamma = a_z$$

Allora, utilizzando le proprietà dei vettori:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} \mathbf{i} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} \mathbf{j} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Le proprietà dei vettori sopra esposte si possono allora riscrivere in questa rappresentazione:

moltiplicazione per uno scalare: $q \mathbf{a} = q (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = q a_x \mathbf{i} + q a_y \mathbf{j} + q a_z \mathbf{k}$

prodotto scalare: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ [gli altri termini sono nulli!]

In particolare: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\mathbf{a}|^2 = a^2$ N.B. a rappresenta una quantità scalare, quindi non può essere uguagliata ad un vettore \mathbf{a} , per esempio.

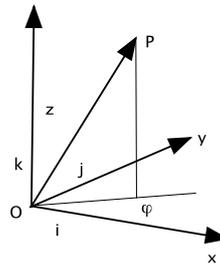
prodotto vettoriale: per i versori degli assi coordinate si ha: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

Utilizzando queste relazioni si vede allora che:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} =$$

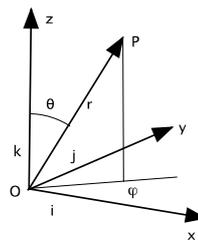
$$= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \text{ quest'ultima è una rappresentazione formale dell'operazione}$$

Coordinate cilindriche



Il generico punto P è identificato dal vettore $\vec{x} = \vec{OP}$ che è rappresentabile dalla terna di numeri (r, φ, z) dove $r \geq 0$ è la distanza dall'origine della proiezione del punto P sul piano \hat{xy} , z è la coordinata lungo l'asse z e φ è l'angolo tra la proiezione di \vec{x} sul piano \hat{xy} con il semiasse x positivo. La relazione con le componenti cartesiane ortogonali è: $\vec{x} = \mathbf{i} r \cos \varphi + \mathbf{j} r \sin \varphi + z \mathbf{k}$

Coordinate sferiche



Il vettore \vec{OP} è identificato anche dalla terna (r, ϑ, φ) con $r \geq 0$. r rappresenta in questo caso la distanza di P dall'origine.

$$\vec{x} = \vec{OP} = \mathbf{i} r \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j} r \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{k} r \cos \vartheta$$

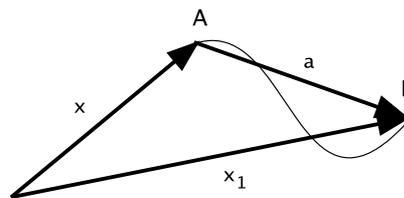
Esempi

1. Vettore posizione

Per definire la posizione di un oggetto puntiforme occorre un osservatore O dotato di un sistema di riferimento spaziale e temporale. Sia questo una terna di assi ortogonali ed un orologio. La posizione dell' oggetto ad un istante temporale fissato è allora determinata dal vettore $\vec{OA} = \mathbf{x}$. X dipende da O ed $|\mathbf{x}|$ è la distanza tra O ed A.

2. Vettore spostamento

L'oggetto si muova ora da A a B. Il vettore $\vec{AB} = \mathbf{a}$ rappresenta lo spostamento dell'oggetto (non necessariamente la traiettoria seguita). \mathbf{a} è indipendente dal sistema di riferimento scelto. Nel sistema di riferimento O, la nuova posizione dell'oggetto è data da $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \mathbf{a}$



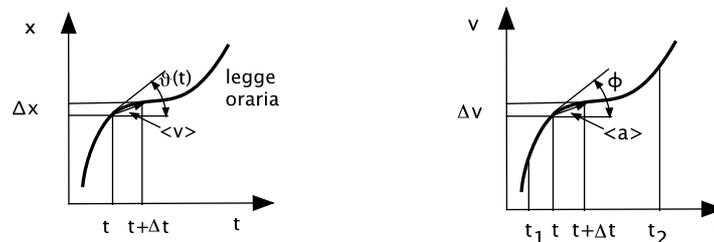
II cinematica

II 1. moto rettilineo (grandezze scalari)

Velocità istantanea: $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ con $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ (spostamento) e $\Delta t > 0$. $x(t)$ è la posizione, nel sistema di riferimento scelto lungo l'asse del moto, del punto materiale all'istante di tempo t. Nel Sistema SI la velocità si esprime in $\frac{m}{s}$.

Velocità media nell'intervallo Δt : $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Significato geometrico: si parte dalla legge oraria $x = x(t)$



e si osserva che $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \text{tg } \vartheta(t)$ con $\vartheta(t)$ angolo che la tangente alla legge oraria forma con l'orizzontale. Si nota che dx e dt sono differenziali esatti (infinitesimi) mentre Δx e Δt sono quantità finite.

Accelerazione istantanea: $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ [m/s²] *variazione di velocità istantanea*

Accelerazione media: $\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ con $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ *variazione media della velocità in un intervallo di tempo finito Δt*

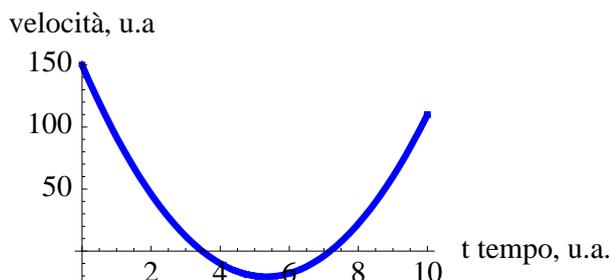
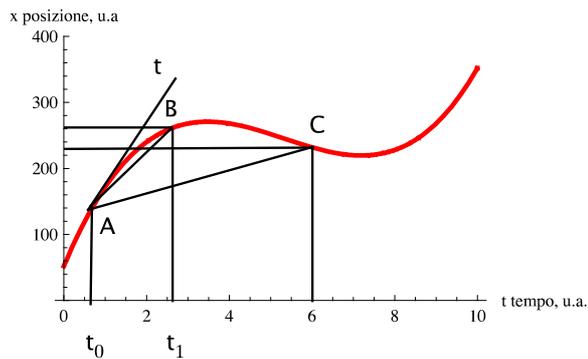
Invertendo le relazioni precedenti si può scrivere, tenendo a mente il significato di integrale:

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \quad ; \quad x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad [\text{II.1}]$$

esempi

■ esempio numerico

Un punto materiale abbia una legge del moto data da: $x = 52 + 150 t - 32 t^2 + 2 t^3$. Con riferimento ai grafici qui sotto, la velocità media tra gli istanti di tempo 6 e .6 è rappresentata dalla pendenza del segmento \overline{AC} rispetto all'orizzontale: $\langle v \rangle_{AC} = \frac{x(6) - x(.6)}{5.4} = 18.7$ [$\frac{\text{unità di distanza}}{\text{unità di tempo}}$] = $\text{tg } \vartheta_{AC}$. Similmente $\langle v \rangle_{AB} = 66.1$ [$\frac{\text{unità di distanza}}{\text{unità di tempo}}$]. La velocità istantanea in A, $v(t_0) = \lim_{B \rightarrow A} \frac{x(B) - x(A)}{t_1 - t_0} = 114$ [unità di velocità]



■ moto rettilineo uniforme

$v = v_0 = \text{costante}$; quindi $\frac{dv}{dt} = 0$ l'accelerazione del punto materiale è nulla: $a = 0$

legge oraria: $x(t) = x_0 + v_0 t$;:

■ moto rettilineo uniformemente accelerato

$a = a_0 = \text{costante}$; dalle [II.1] si ha $v(t) = v(t_1) + \int_0^t a(u) du = v_0 + a_0 t$, essendo v_0 la velocità iniziale al tempo $t = 0$. Con una ulteriore integrazione si ottiene la legge oraria:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(q) dq = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad [\text{II.2}]$$

con x_0 la posizione iniziale lungo l'asse del moto.

A volte è utile avere una relazione tra v e x : dalla definizione di $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$ si ottiene

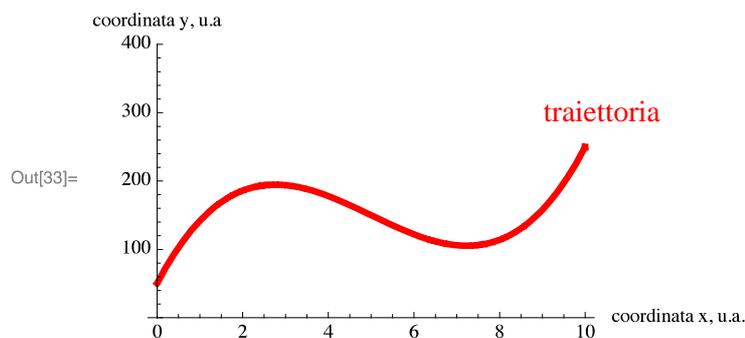
$a dx = v dv$ ovvero, integrando

$$\int a dx = \frac{1}{2} v^2$$

nel caso di moto uniformemente accelerato, essendo $a = a_0 = \text{costante}$: $a_0 \Delta x = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2)$ con v_f e v_i velocità finale ed iniziale, rispettivamente.

Il 2. moto nel piano

Le osservabili fisiche introdotte (posizione, spostamento, velocità, accelerazione) assumono carattere vettoriale e si ottengono quindi generalizzando i concetti esposti prima.



In due dimensioni, la legge del moto in coordinate cartesiane è data dalla composizione dei due moti lungo x ed y :

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{quindi il vettore velocità è } \mathbf{v}(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

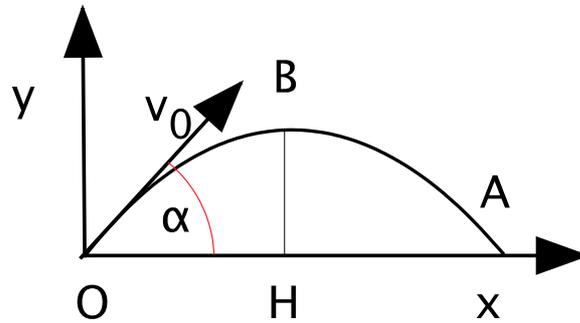
Da questa definizione segue che il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria del punto materiale. Infatti $v_x / v_y = dy/dx$ che è l'inclinazione della retta tangente alla traiettoria. Il

caso delle coordinate cilindriche e sferiche può essere ridotto al caso cartesiano: $\mathbf{v}(t) = \frac{d(r \cos \theta)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(r \sin \theta)}{dt}\mathbf{j} + z \mathbf{k}$ eccetera.

esempi

■ moto dei proiettili

Il moto dei corpi sotto l'influsso della gravità terrestre è descritto (cfr. III) da un vettore accelerazione $\mathbf{g} = -g \mathbf{j}$ diretto verso il basso. g vale in media 9.8 m s^{-2} . Se un corpo viene lanciato dall'origine degli assi con velocità $|v_0|$ nella direzione che forma un angolo α rispetto alla orizzontale



Si ha: $\mathbf{a}(t) = -g \mathbf{j}$; $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{g}(t') dt' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} t = (v_0 \cos \alpha) \mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha - g t) \mathbf{j}$ da cui, integrando una seconda volta rispetto a t :

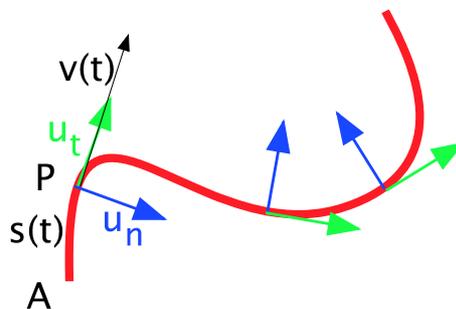
$$\mathbf{x}(t) = (v_0 t \cos \alpha) \mathbf{i} + (v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2) \mathbf{j}$$

La massima altezza raggiunta si ha per $v_y(t_B) = 0$ ovvero per $v_0 \sin \alpha - g t_B = 0 \Rightarrow t_B = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

$$\overline{BH} = y(t_B) = (v_0 t_B \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_B^2) = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

La gittata si ottiene imponendo che $y(t) = 0$: $\Rightarrow t = 0$ e $t_A = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = 2 t_B$; $x(t_A) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ è massima per $\alpha = \pi/4$.

Il 3. rappresentazione del moto riferita alla traiettoria



Si introducono due versori tangenti ($u_t(t)$) e perpendicolari ($u_n(t)$) alla traiettoria $s(t)$. $s(t)$ è la lunghezza del tratto di traiettoria dall'origine A al punto P raggiunto all'istante t . Si noti che i due versori sono legati al punto P ed alla traiettoria s in quel punto: essi variano nel tempo. Il vettore velocità si scrive:

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{u}_t(t) \text{ con } v(t) = \frac{|ds(t)|}{dt} = \text{velocità (scalare) istantanea.}$$

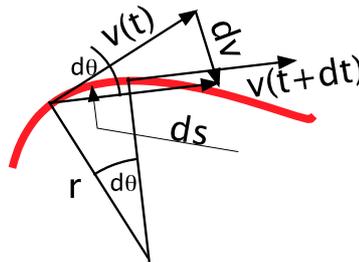
L'accelerazione sarà data da :

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}[V(t)] \mathbf{u}_t(t) + v(t) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}_t(t)].$$

Risulta che $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_t(t)]$ è perpendicolare a $\mathbf{u}_t(t)$ poichè

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_t(t) \cdot \mathbf{u}_t(t)] = \frac{d}{dt}[1] = 0 = 2 \mathbf{u}_t(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t(t).$$

Questo appare anche geometricamente andando a considerare la differenza tra $\mathbf{v}(t + dt)$ e $\mathbf{v}(t)$



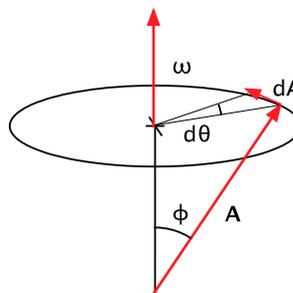
in più: $d\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_n(t) d\theta = \mathbf{u}_n(t) \frac{ds}{r}$; e $\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \mathbf{u}_n(t) \frac{ds}{r dt} = \mathbf{u}_n(t) \frac{v(t)}{r}$; da questo si ottiene

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}[V(t)] \mathbf{u}_t(t) + v(t) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}_t(t)] = \frac{d}{dt}[V(t)] \mathbf{u}_t(t) + \mathbf{u}_n(t) \frac{v^2}{r}$$

L'accelerazione istantanea è costituita da due termini: il primo è dovuto alla variazione del modulo della velocità (accelerazione tangenziale), il secondo è dovuto alla variazione di direzione del vettore velocità ed orientata verso l'interno della traiettoria (accelerazione centripeta). Il vettore \mathbf{r} rappresenta il raggio di curvatura locale della traiettoria del punto materiale. Esso è costante in modulo per i moti circolari.

moto di precessione

Un vettore \mathbf{A} precessa attorno ad un asse con velocità angolare ω .



in un intervallo infinitesimo dt la variazione di \mathbf{A} , $d\mathbf{A}$ vale:

$$|d\mathbf{A}| = |\mathbf{A} \sin\phi| d\theta; \quad \left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| = \left| \frac{\mathbf{A} \sin\phi d\theta}{dt} \right| = |\sin\phi \omega| = |\omega \times \mathbf{A}|$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega \times \mathbf{A} \tag{II.3}$$

La derivata temporale di un vettore \mathbf{A} che precessa attorno ad un asse con velocità angolare ω

vale $\omega \times A$. Questo risultato è generale nel senso che il vettore ω può essere dipendente dal tempo.

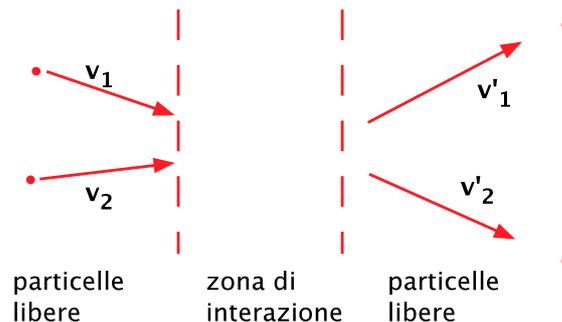
III dinamica

III 1. principio di inerzia

- **particella libera:** non è soggetta ad alcuna interazione con il resto dell'Universo.
- **osservatore inerziale:** è dotato di un sistema di riferimento spazio-temporale che misura velocità costanti per le particelle libere.
- **Principio di Inerzia e prima legge di Newton:** una particella libera si muove con velocità costante
- Il concetto di osservatore inerziale è ideale: si possono però avere sistemi di riferimento inerziali in zone limitate dello spazio. Esempio: un riferimento solidale al suolo è inerziale per una pietra che cade nelle sue vicinanze.

III 2. massa inerziale

Siano due particelle libere viste dal medesimo osservatore O. Le due particelle (1) e (2) si avvicinano tra loro ed entrano quindi in una zona in cui interagiscono tra loro. L'interazione sarà vista da O come un cambiamento del moto delle due particelle. E' plausibile che dopo un certo tempo le particelle arrivino in una zona di spazio in cui l'interazione sia di nuovo nulla. Le velocità delle due particelle saranno di nuovo vettori costanti. La situazione è la seguente:



- variazione delle velocità dopo l'interazione:

$$\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1; \quad \Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2; \quad \text{[III.1]}$$

Si osserva sperimentalmente che è sempre verificata la relazione:

$$\Delta \mathbf{v}_1 = -K \Delta \mathbf{v}_2 \quad \text{[III.2]}$$

con K positivo e sempre uguale per ogni coppia data di particelle. Sia (0) una particella di riferimento che si fa interagire successivamente con tutte le altre particelle 1, 2, 3..... Dalla [III.2] si ha, in esperimenti successivi:

$$\Delta \mathbf{v}_0 = -m_1 \Delta \mathbf{v}_1; \quad \Delta \mathbf{v}_0 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2; \quad \dots \quad \text{[III.3]}$$

m_1, m_2, \dots dipendono rispettivamente dalle particelle 1, 2, ... dalla particella di riferimento (0) e si dicono masse inerziali delle particelle 1,

2, . . . rispettivamente. Nel sistema SI le masse si misurano in kilogrammi – massa. Da [III.2] e [III.3] si ha :

$$K = - \frac{m_2}{m_1} \quad \text{[III.4]}$$

e quindi si può predire il risultato di esperimenti tra particelle una volta note masse inerziali e condizioni iniziali.

III 3. quantità di moto di una particella

Definizione: $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ \mathbf{v} è misurata da un osservatore inerziale.

Riedizione del Principio di Inerzia: per una particella libera la quantità di moto è costante.

Conservazione della quantità di moto: 2 particelle interagiscono tra loro. La variazione di quantità di moto di ciascuna particella vale:

$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = m_1 (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1)$; $\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = m_2 (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)$ e dalle [III.2] e [III.4] si ottiene:

$$\Delta \mathbf{p}_1 = - \Delta \mathbf{p}_2 \quad \text{[III.5]}$$

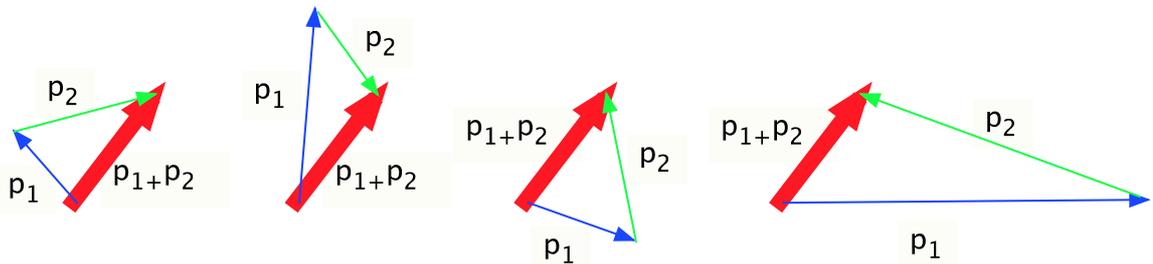
Nell'interazione le due particelle si scambiano quantità di moto. La [III.5] può anche scriversi:

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} = \Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad \text{[III.6]}$$

ovvero

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante} \quad \text{[III.7]}$$

Per due particelle che interagiscono solo tra loro (cioè per due particelle isolate) la quantità di moto totale del sistema $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ è un vettore costante durante il moto. La [III.7] esprime il Principio di Conservazione della quantità di moto. Il fatto che la quantità di moto del sistema sia costante significa che il vettore somma $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ rimane sempre quello misurato per esempio all'istante iniziale anche se i due vettori \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 cambiano durante il moto:



Nel caso di N ($N > 1$) particelle isolate mutuamente interagenti:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \text{costante}$$

III 4. Il legge di Newton

Due particelle isolate interagiscono tra loro: vale allora la [III.5]. La variazione di quantità di moto sia avvenuta in un intervallo di tempo Δt :

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = - \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t}$$

e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = - \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad \text{[III.8]}$$

Il rapporto $\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}$ rappresenta l'intensità della interazione sulla particella 1 causata dalla particella 2. Questo rapporto definisce la forza agente sulla particella 1 (II legge di Newton):

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad \text{[III.9]}$$

Riscrivendo la [III.8]: si ha

$$\mathbf{F}_1 = - \mathbf{F}_2 \quad \text{[III.10]}$$

che rappresenta il Principio di Azione e Reazione, o III legge di Newton. Dalla [III.9], a ritroso, si ottiene, nel caso in cui la massa della particella sia costante:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[m \mathbf{v}] = m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = m \mathbf{a} \quad \text{[III.11]}$$

Se la particella (1) interagisce simultaneamente con le particelle 2, 3, ... N, si possono definire le forze agenti su (1) dovute all'interazione con le particelle 2, 3, ... N come $\mathbf{F}_{1,2}, \mathbf{F}_{1,3}, \dots, \mathbf{F}_{1,N}$ e la forza totale

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{1,i} = m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{[III.12]}$$

Si noti che $\mathbf{F}_{1,i}$ è la forza agente su (1) a causa della sua interazione con la particella i indipendentemente dalla presenza delle altre particelle. In altre parole, per le forze vale il Principio di Sovrapposizione. La forza totale agente sulla particella (1) è la somma (vettoriale!) delle forze cui essa è sottoposta a causa della interazione con ciascuna altra particella. Le forze sono sempre binarie.

III 4. momento angolare

Data una particella di massa m e velocità \mathbf{v} il suo momento angolare (o momento della quantità di moto) rispetto al polo O è dato da $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$ dove \mathbf{r} è il vettore dal polo O alla particella e \mathbf{p} la quantità di moto della particella. \mathbf{L} è un vettore perpendicolare al piano passante per \mathbf{p} ed \mathbf{r} ed è nullo quando $\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}$. Il calcolo della derivata temporale di \mathbf{L} porta a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r} \right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{p} \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{[III.13]}$$

Quest'ultima espressione definisce il *momento della forza* \mathbf{F} . La $\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ costituisce una ulteriore equazione del moto del sistema particolarmente utile, come si vedrà, nella descrizione delle rotazioni dei sistemi di più particelle.

Un caso particolare della [III.13] si ha quando è sempre verificato che $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$. In questo caso la forza si dice centrale rispetto ad O ed O è il centro della forza. Le forze centrali conservano il momento angolare ($\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{0}$). Le forze centrali giocano un ruolo fondamentale in Natura (forze gravitazionali, elettromagnetiche, nucleari sono di questo tipo).

IV lavoro ed energia

IV 1. definizione di lavoro di una forza

Data una forza \mathbf{F} si definisce il lavoro elementare compiuto dalla forza quando il punto di applicazione si sposta di una quantità infinitesima $d\mathbf{r}$ il prodotto scalare $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Si noti che se \mathbf{F} e $d\mathbf{r}$ sono perpendicolari si ha che $dW = 0$.

Se ora un punto materiale è soggetto ad una forza \mathbf{F} e si sposta lungo una traiettoria S , il lavoro della forza \mathbf{F} lungo la traiettoria è

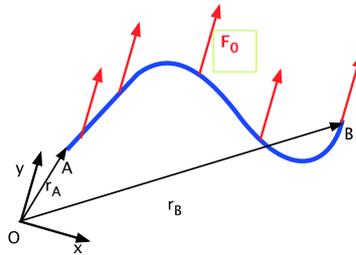
$$W = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [\text{IV.1}]$$

essendo $d\mathbf{r}$ l'elemento infinitesimo di traiettoria S percorsa.

esempio

Forza costante: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 = F_0 \mathbf{j}$

$$W = \mathbf{F}_0 \cdot \int d\mathbf{r} = \mathbf{F}_0 \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = F_0 (y_B - y_A)$$



IV 2. energia cinetica

Definizione: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ energia cinetica di una particella di massa m e velocità \mathbf{v} . [IV.2]

Teorema dell'energia cinetica:

$$W = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S m \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2(B) - \frac{1}{2} m v^2(A) = E_k(\text{finale}) - E_k(\text{iniziale}) \quad [\text{IV.3}]$$

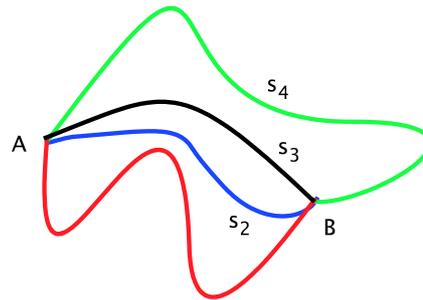
Il lavoro di una forza applicata ad un punto materiale di massa m lungo una traiettoria vale la variazione totale di energia cinetica. Esso è indipendente dalla traiettoria e dipende solo dalle energie cinetiche iniziali e finali del punto materiale.

IV 3. forze conservative

Si consideri una forza definita in uno spazio semplicemente connesso ed in generale dipendente dalla posizione, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Tale forza sia applicata ad un punto materiale di massa m . Se per ogni coppia di punti A e B dello spazio in questione il lavoro di \mathbf{F} è sempre lo stesso per qualsiasi traiettoria che li unisca, allora esiste una funzione scalare $U(\mathbf{r})$ tale che

$$W = \left(\int_{AB} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right)_S = U(A) - U(B) = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) \quad [IV.4]$$

U viene detta energia potenziale della massa m associata alla forza \mathbf{F} . Essa sarà definita per ogni punto \mathbf{r} del dominio.



Definizione alternativa: una forza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ si dice conservativa quando l'integrale di circuitazione $\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ per qualsiasi percorso chiuso risulti identicamente nullo: in tal caso è possibile definire una funzione scalare $U(\mathbf{r})$ detta energia potenziale tale che valga la [IV.4].

Relazione tra forza ed energia potenziale: data una forza conservativa è possibile quindi definire $U(\mathbf{r})$ tale che $dU = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$. D'altra parte, supponendo di usare coordinate cartesiane ortogonali:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U + \text{cost.} \quad [IV.5]$$

dove si è introdotto l'operatore differenziale gradiente definito come:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad [IV.6]$$

Questo operatore, applicato alla funzione U , genera il vettore $\nabla U = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}$ che, moltiplicato scalarmente per lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$, dà luogo alla terza espressione della [IV.5].

esempi

1. Forza peso: $\mathbf{F} = -mg \mathbf{j}$ (forza diretta verso il basso, \mathbf{j} diretto verso l'alto). Dalla [IV.6] si ha $\nabla U = \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} = -\mathbf{j} F_y = mg \mathbf{j}$ da cui $U(y) = mg y + \text{costante}$

2. Forza elastica (in 1 dimensione): $F = -k x$, dove x rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio. Dalle [IV.5] si ottiene $k x = \frac{dU}{dx}$; ovvero $U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + \text{costante}$.

IV 4. teorema di conservazione dell'energia meccanica

Una particella di massa m sia soggetta a forze conservative \mathbf{F}_C ed a forze non conservative \mathbf{F}_{NC} . La particella percorra una traiettoria tra i punti A e B. Il lavoro delle forze applicate vale (cfr. [IV.3] e [IV.4])

$$W_{AB} = \int_{AB} \mathbf{F}_C(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{F}_{NC}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_k(B) - E_k(A) = U(A) - U(B) + \int_{AB} \mathbf{F}_{NC}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

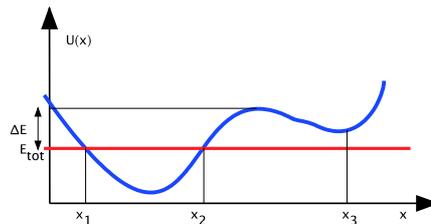
Ponendo $\int_{AB} \mathbf{F}_{NC}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = W_{AB}^{NC}$ e separando i termini in A da quelli in B:

$$U(A) + E_k(A) = U(B) + E_k(B) + W_{AB}^{NC} \quad [IV.7]$$

La quantità $U + E_k$ definisce la *energia meccanica* del sistema e la [IV.7], in presenza delle sole forze conservative, costituisce l'enunciato del *teorema di conservazione dell'energia meccanica*. Nel caso generale la [IV.7] indica che l'energia meccanica varia in presenza di forze non conservative.

IV 4. curve di energia potenziale

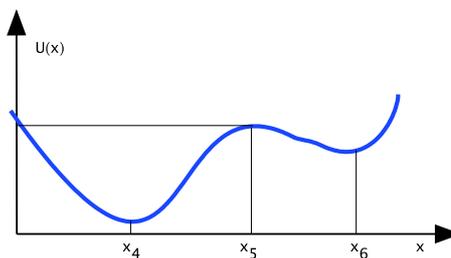
Una particella si muova in una dimensione soggetta ad una forza conservativa di potenziale $U(x)$:



La sua energia meccanica totale sia E_{tot} . La traiettoria della particella sarà limitata all'intervallo (x_1, x_2) . Il resto dell'asse x non è accessibile a meno di non fornire ulteriore energia totale al sistema. Per esempio, fornendo una ulteriore quantità di energia ΔE è possibile far raggiungere alla particella la posizione x_3 . La particella è così in grado di superare il massimo dell'energia potenziale U tra x_2 e x_3 .

IV 5. posizioni di equilibrio

Con riferimento al medesimo potenziale della figura precedente, si considerino gli estremi del potenziale in x_4, x_5 e x_6 :

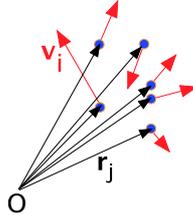


Dalla definizione di potenziale [IV.5] si vede che negli estremi la forza applicata è nulla. Gli estremi sono quindi posizioni di equilibrio per il sistema. Inoltre, per x_4 ed x_6 la forza è concorde con l'asse x alla sinistra ed opposta alla destra dell'estremo. Viceversa, per x_5 , la forza è concorde con l'asse x a destra ed opposta alla sinistra. Nel primo caso abbiamo quindi in x_4 ed x_6 un equilibrio stabile, poichè ogni spostamento del punto materiale dalla posizione di equilibrio dà luogo ad una forza che tende a riportarlo verso l'estremo. Per x_5 uno spostamento dalla posizione di equilibrio provoca invece forze che tendono ad allontanare ulteriormente il punto materiale: in questo caso l'equilibrio è detto instabile.

V sistemi di particelle

V 1. centro di massa

Siano date N particelle $i = 1, 2, \dots, N$ di masse m_i , posizioni \mathbf{x}_i e velocità \mathbf{v}_i :



Un punto rappresentativo dell'insieme di punti materiali considerati è il *centro di massa*: se ad un certo istante di tempo le posizioni e velocità sono rappresentate dagli insiemi $\{\mathbf{r}_i\}$ e $\{\mathbf{v}_i\}$, la posizione del centro di massa è definita al medesimo istante come

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad [\text{V} . 1]$$

che può anche interpretarsi come

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) \mathbf{r}_i \quad [\text{V} . 2]$$

ovvero media pesata secondo le masse delle posizioni di ciascuna particella del sistema.

Quantità di moto del sistema: è definita come somma (vettoriale) delle quantità di moto delle singole particelle:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad [\text{V}.3]$$

Derivando la [V.1] rispetto al tempo si definisce la velocità del centro di massa:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) \mathbf{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad [\text{V}.4]$$

con $M = \sum_{i=1}^N m_i$ massa totale del sistema. Dalle [V.3] e [V.4] si ottiene

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad [\text{V}.5]$$

La [V.5] mostra che la quantità di moto dell'intero sistema vale il prodotto della massa totale per la velocità del centro di massa. Si associa quindi il significato di quantità di moto del centro di massa alla quantità di moto totale del sistema.

Sistemi isolati: se il sistema di N particelle è isolato, allora si conserva la quantità di moto totale: la [V.5] dice allora che la velocità del CM è costante:

Il centro di massa di un sistema isolato si muove con velocità costante in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

V 2. dinamica dei sistemi di particelle

Si consideri un sistema S di particelle: $S = S' \cup S''$ costituito da due sottoinsiemi S' e S'' . Se S è isolato allora $\mathbf{P}_S = \mathbf{P}_{S'} + \mathbf{P}_{S''} = \text{costante}$. Derivando rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}_S &= \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{S'} + \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{S''} = 0 \quad \text{ovvero} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{S'} &= -\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{S''} \end{aligned} \quad [\text{V.6}]$$

La variazione della quantità di moto di S' avviene a spese di quella di S'' . Si definisce quindi forza agente sul sottoinsieme S' la quantità

$$\mathbf{F}_{S'} \hat{=} \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{S'} \quad . \quad [\text{V.7}]$$

La [V.6] diviene quindi la *legge di azione e reazione* per i sistemi S' e S'' . Da questa definizione si ottiene anche:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} (\mathbf{M} \mathbf{v}_{\text{CM}}) = \mathbf{M} \mathbf{a}_{\text{CM}} \quad [\text{V.8}]$$

Il centro di massa del sistema si muove come una particella di massa pari alla massa totale del sistema e soggetta alla forza agente sul sistema di particelle. La [V.8] rappresenta la II legge di Newton per un sistema di particelle. Questa equazione, tuttavia, va ulteriormente precisata secondo le seguenti modalità. Il moto della i-esima particella è determinato dalle forze che agiscono su di essa. Queste possono suddividersi in forze esterne $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ e forze interne dovute all'interazione con le altre N-1 particelle: $\mathbf{F}_i^{\text{int}} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j}$. La legge del moto per la i-esima particella si scrive allora

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} \quad \text{da cui, sommando su tutte le particelle, per la [V.3], la [III.10] e la [V.8]}$$

si ha:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{\text{CM}}$$

ovvero, ponendo $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$,

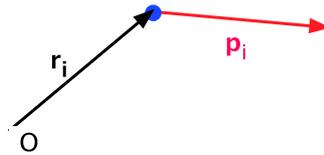
$$\mathbf{R} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{\text{CM}} \quad [\text{V.9}]$$

i) il moto del centro di massa è determinato dalla risultante delle forze esterne $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$

ii) la forza esterna applicata al sistema è la somma vettoriale di tutte le forze esterne applicate a ciascuna particella del sistema.

iii) le forze interne tra le particelle non determinano in alcun modo il moto del centro di massa

V 3. momento angolare nei sistemi di particelle

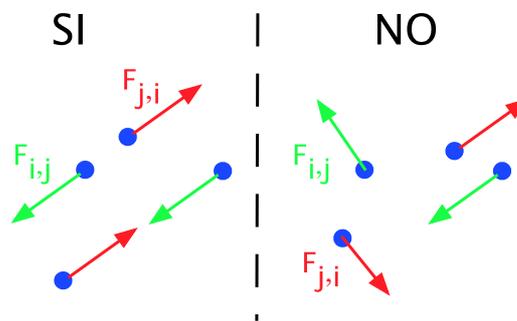


Dato un sistema di N particelle il momento angolare della i -esima particella rispetto al polo O è: $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$.

Se alla particella i sono applicate le forze interne $\mathbf{F}_{i,j}$ e la forza esterna $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$, vale l'equazione del momento angolare per la particella i -esima

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j}) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} \quad [\text{V.8}]$$

Si ipotizza ora che le forze interne $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ siano non solamente parallele così come prescritto dalla III legge di Newton ma anche dirette lungo la congiungente tra le due particelle:



Sommando le [V.8] su tutte le N particelle:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j}$$

Il secondo termine dell'ultima somma può essere organizzato a coppie di termini

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{j,i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i,j} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{i,j}$$

L'ultimo termine è un prodotto vettoriale tra vettori paralleli che dà risultato nullo. Si conclude quindi che

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}^{\text{ext}} \quad [\text{V.9}]$$

La variazione di momento angolare di un sistema di particelle è determinata dal momento delle sole forze esterne.

In particolare, se il sistema è isolato si ha che $\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0$ e si ha conservazione del momento angolare.

V 4 sistema di riferimento del centro di massa

Se poniamo un osservatore O' nel centro di massa di un sistema di N particelle, questo osserverà le posizioni $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$ e le velocità $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$ $i = 1, \dots, N$. Utilizzando le definizioni precedenti [V.1], [V.4] si ha che (verificare per esercizio)

$$\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{p}'_{CM} = \mathbf{0}; \quad [V.10]$$

Si noti che in generale il sistema di riferimento del centro di massa non è inerziale.

V 5 momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\begin{aligned} \hat{L} &\equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \{ (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) \} \\ &= \sum_{i=1}^N \{ \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} - \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} \} \\ &= \mathbf{L}' - M \mathbf{r}'_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} - M \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}'_{CM} + M \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} \\ &= \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM} \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}' \quad [\text{I teorema di König}]$$

Il momento angolare totale \mathbf{L} di un sistema di N particelle (in un sistema di riferimento inerziale) può scriversi come la somma vettoriale del momento angolare totale \mathbf{L}' riferito al sistema del centro di massa (momento angolare intrinseco) e del momento angolare del centro di massa \mathbf{L}_{CM} dovuto al moto del centro di massa.

V 5. evoluzione temporale del momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa

Si esprime qui il momento delle forze esterne al sistema di particelle in funzione delle coordinate nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{\text{ext}} &\stackrel{\wedge}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \\ &\quad \boldsymbol{\tau}'_{\text{ext}} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \end{aligned} \quad [V.11]$$

Viceversa, dal I teorema di König, derivando rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}' &= \frac{d}{dt} \mathbf{L} - \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{CM} = \frac{d}{dt} \mathbf{L} - \frac{d}{dt} (M \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{L} - \mathbf{r}_{CM} \times M \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \mathbf{L} - \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \end{aligned}$$

che, sostituita nella [V.11] porta alla $\boldsymbol{\tau}^{\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}'_{\text{ext}} + \frac{d}{dt} \mathbf{L} - \frac{d}{dt} \mathbf{L}'$ ovvero, dalla [V.9]

$$\boldsymbol{\tau}'_{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}' \quad [V.12]$$

Per il sistema di riferimento del centro di massa, che in generale non è inerziale, vale lo stesso

l'equazione di evoluzione del momento angolare valida per tutti i sistemi inerziali.

V 6. energia cinetica di un sistema di particelle

$$E_{k,tot} = \sum_{i=1}^N E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

Considerando ora il sistema di riferimento del centro di massa: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i$ e sostituendo

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i)$$

$$E_{k,tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_{CM}^2 + 2 \mathbf{v}_{CM} \cdot \mathbf{v}'_i + v_i'^2) = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \mathbf{v}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} M v_i'^2$$

Ora il secondo termine è nullo perchè $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = M \mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$ e quindi

$$E_{k,tot} = E_{k,CM} + E'_{k,tot} \quad [V.13]$$

L'energia cinetica di un sistema di particelle vale la somma dell'energia cinetica del centro di massa $E_{k,CM}$ (energia cinetica traslazionale) e dell'energia cinetica delle particelle calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, $E'_{k,tot}$ (energia cinetica interna).

Questo è il secondo teorema di König.

V 7. urti tra due particelle

Due particelle 1 e 2 inizialmente isolate si urtano tra loro. Si suppone che la durata dell'urto sia breve rispetto alla dinamica delle particelle. Si distinguono due modalità di urto:

1- urti anelastici. Vale la conservazione del momento angolare :

$\mathbf{p}_{totale} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_{totale}$ i vettori primati si riferiscono a subito dopo l'urto, quelli non primati a subito prima. Si tratta di tre equazioni nelle componenti dei quattro vettori.

2- urti elastici. Oltre alla conservazione del momento angolare, viene conservata anche l'energia cinetica:

$E_{k,totale} = E_{k,1} + E_{k,2} = E_{k,1}^{\prime} + E_{k,2}^{\prime} = E_{k,totale}^{\prime}$ Si aggiunge cioè, dal punto di vista algebrico, una ulteriore equazione scalare.

V 8. impulso di una forza

Per una forza $\mathbf{F}(t)$, dipendente dal tempo e diversa da zero solo in un intervallo Δt , agente su una particella di massa m è utile introdurre l'impulso \mathbf{j} della forza definito come

$$\mathbf{j} \hat{=} \int_{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt = \int_{\Delta t} \frac{d}{dt} \mathbf{p} dt = \int_{\Delta t} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t+\Delta t) - \mathbf{p}(t) = m (\mathbf{v}_{finale} - \mathbf{v}_{iniziale})$$

Le ultime due espressioni vanno sotto il nome di teorema dell'impulso: *l'impulso di una forza uguaglia la variazione di quantità di moto della particella cui la forza è applicata.*

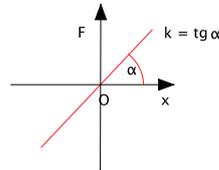
In maniera duale si definisce il momento dell'impulso ed il relativo teorema:

$$\mathbf{M} \hat{=} \mathbf{r} \times \mathbf{j} = \mathbf{r} \times \int_{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt = \int_{\Delta t} \mathbf{r} \times \mathbf{F}(t) dt = \int_{\Delta t} \frac{d}{dt} \mathbf{L} dt = \int_{\Delta t} d\mathbf{L} = \mathbf{L}_{finale} - \mathbf{L}_{iniziale}$$

VI oscillazioni

VI 1. moto armonico semplice

Una massa m sia sottoposta ad una forza $f = -k x$, ad esempio tramite una molla che viene compressa od estesa. La variabile spaziale x rappresenta lo spostamento della massa dalla posizione di equilibrio, in cui la forza è nulla.



L'equazione del moto è $m \ddot{x} = -k x$. Ponendo $\omega^2 = k/m$ la forma canonica dell'equazione è

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{[VI.1]}$$

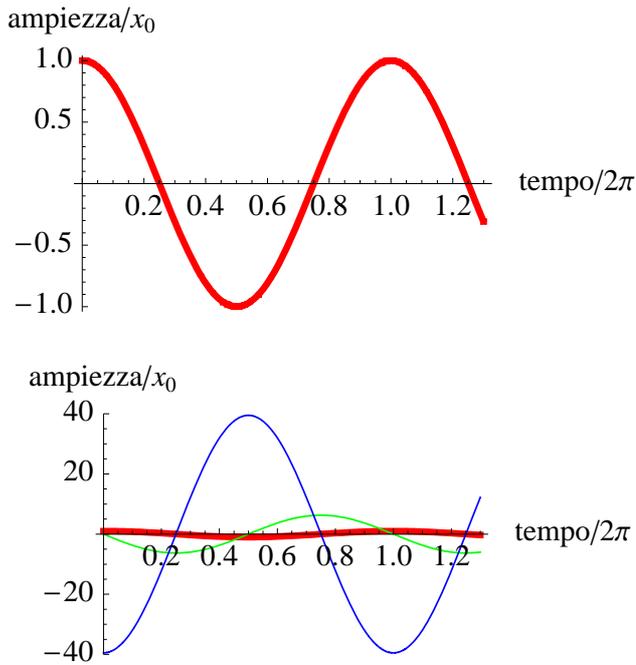
Questa equazione, in generale, rappresenta un oscillatore armonico, il più semplice sistema oscillante. L'equazione è differenziale lineare omogenea del secondo ordine. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 + \omega^2 = 0$ le cui soluzioni sono $\alpha = \mp i\omega$. La soluzione dell'equazione del moto è $x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$ con A e B costanti da determinarsi.

Si può dimostrare che questa forma è equivalente alla $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Un'altra forma è $A \cos(\omega t + \varphi)$, dipendente dall'ampiezza A , frequenza angolare o pulsazione ω e fase φ . Le costanti (A, B oppure A, φ) sono da determinarsi sulla base delle condizioni iniziali. Per esempio si supponga che all'istante $t = 0$ la massa sia nella posizione x_0 con velocità nulla. Specializzando $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ per $t = 0$ si ha:

$x_0 = A$; $0 = B \omega$; la soluzione sarà quindi:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad \text{[VI, 2]}$$

Il periodo del moto oscillatorio è $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e la frequenza del moto è $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Il grafico di sinistra rappresenta l'ampiezza (normalizzata al valore iniziale x_0) in funzione del tempo per una pulsazione $\omega = 2\pi$ r/s. Nel grafico di destra, oltre alla ampiezza (in rosso) è riportato l'andamento della derivata prima (in verde) e della derivata seconda (in blu). Si noti che $\ddot{x} = -\omega^2 x(t)$. ω è anche detta frequenza naturale dell'oscillatore armonico.



VI 2. oscillatore armonico smorzato

Se ad un oscillatore armonico del tipo descritto nel paragrafo precedente si applica una forza esterna dissipativa proporzionale alla velocità istantanea (forza d'attrito viscoso, per esempio) $F_a = -2 \gamma m \dot{x}$, si ottiene per l'equazione di Newton:

$$m \ddot{x} = -2 \gamma m \dot{x} - k x \quad [\text{VI.3}]$$

ovvero, in forma canonica:

$$\ddot{x} + 2 \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(equazione differenziale omogenea del secondo ordine)

l'equazione caratteristica è ora

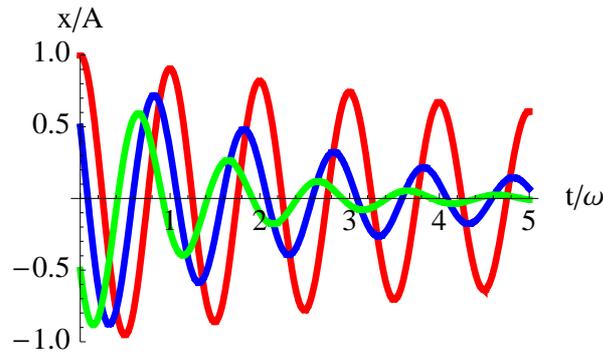
$$\alpha^2 + 2 \gamma \alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \mp i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{le soluzioni sono numeri complessi coniugati per } \omega_0^2 > \gamma^2$$

Questo è il caso più interessante poichè porta a soluzioni ancora di tipo oscillante con frequenza angolare $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, ridotta rispetto alla frequenza naturale ω_0 dell'oscillatore armonico semplice.

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \text{Cos}[\omega t + \varphi] \quad [\text{VI.4}]$$

Nella figura sono riportati i grafici di $x(t)/A$ in funzione di t/ω con diversi valori di γ e φ : $\gamma=.1, \varphi=0$; $\gamma=.4, \varphi=\pi/3$; $\gamma=.8, \varphi=2 \pi/3$; lo spostamento di ω con γ non è qui apprezzabile.



Le oscillazioni sono smorzate e si riducono di un fattore $1/e$ dopo un tempo $\Delta t = 1/\gamma$

VI 3. oscillatore armonico forzato

Un ultimo importante esempio di oscillazioni si verifica quando al sistema [VI.3] si applica una forza esterna $F(t) = F \cos[\omega t]$

$$\ddot{x} = -2\gamma \dot{x} - \omega_0^2 x + f_0 \cos[\omega t] \quad [\text{VI.5}]$$

con $f_0 = F/m$

$\gamma = b/(2m)$ b coefficiente di attrito viscoso

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ frequenza naturale del sistema

La [VI.5] è una equazione differenziale lineare del secondo ordine con un termine noto (indipendente cioè da x) $f_0 \cos[\omega t]$. La sua soluzione generale è costituita dalla soluzione dell'equazione omogenea associata [VI.3] più una soluzione particolare della equazione completa. Quest'ultima rappresenta la soluzione a regime poichè la soluzione della equazione omogenea è del tipo [VI.4] cioè destinato a smorzarsi dopo un certo intervallo di tempo. Una soluzione della [VI.5] è del tipo

$$x[t] = A \sin[\omega t - \varphi] \quad [\text{VI.6}]$$

dove l'ampiezza A e la fase iniziale φ sono da determinarsi. Questo si può fare sostituendo la [VI.6] e le sue derivate nella [VI.5] ottenendo, dopo un po' di algebra:

$$\begin{aligned} & \cos[t\omega] (-f_0 + A\omega^2 \sin[\varphi] + 2A\gamma\omega \cos[\varphi] - A\sin[\varphi]\omega_0^2) + \\ & + A\sin[t\omega] (2\gamma\omega \sin[\varphi] - \omega^2 \cos[\varphi] + \cos[\varphi]\omega_0^2) = 0 \end{aligned} \quad [\text{VI.7}]$$

Affinchè la [VI.6] sia soluzione della [VI.5] occorre che la [VI.7] sia identicamente nulla per ogni valore di t . Questo significa che i coefficienti delle funzioni $\cos[t\omega]$ e $\sin[t\omega]$ siano identicamente nulli. Dalla seconda delle [VI.7] si ottiene l'espressione della fase:

$$\tan[\varphi] = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}$$

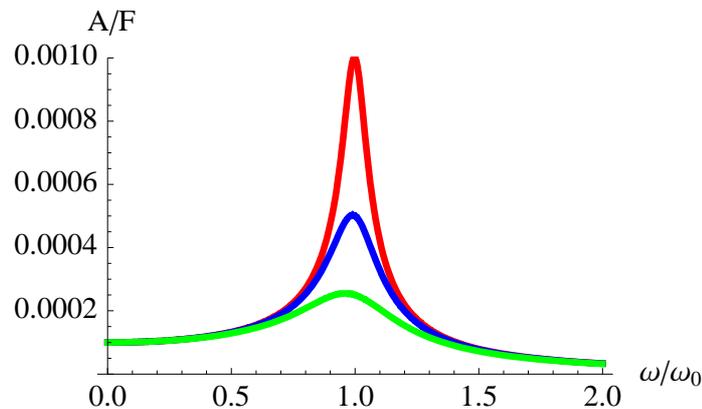
ovvero

$$\cos[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}\right)^2}}; \quad \sin[\varphi] = \frac{\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}\right)^2}} \quad [\text{VI.8}]$$

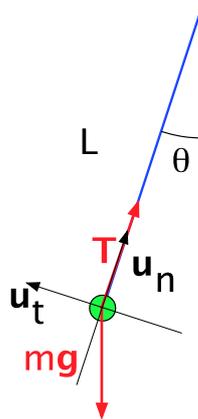
e dalla prima delle [VI.7] si ottiene l'ampiezza, dopo aver sostituito le [VI.8]

$$A = \frac{f_0}{2\gamma\omega \cos[\varphi] + \sin[\varphi](\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad [\text{VI.9}]$$

In figura è riportato l'andamento di A in funzione della frequenza di eccitazione ω della forza esterna F per diversi valori dello smorzamento γ ($\gamma = 5, 10, 20$). A regime il sistema oscilla con frequenza ω costante nel tempo ma l'ampiezza delle oscillazioni dipende dalla frequenza naturale ω_0 del sistema mostrando un aumento dell'ampiezza quando $\omega \rightarrow \omega_0$. Il massimo vale $f_0/2\gamma\omega$ (cfr.[VI.9]) e la forza è in fase con le oscillazioni del sistema ($\varphi = 0$). Si ha cioè un effetto di risonanza.



VI 4. pendolo semplice



■ approccio dinamico

Utilizzando il sistema di riferimento locale $\{u_t, u_n\}$ (si noti che utilizzando θ crescente verso sinistra, anche u_t deve essere congruente) si ha:

$$\begin{cases} mg + \mathbf{T} = m\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = -u_t L\ddot{\theta} + \frac{v^2}{L} u_n \end{cases}$$

(il doppio punto sopra θ indica derivata seconda rispetto al tempo) e scomponendo i vettori:

$$\begin{cases}
 m g \cos[\theta] - T = m \frac{v^2}{L} \\
 m g \sin[\theta] = -m a \\
 a = -L \ddot{\theta} \\
 v = L \dot{\theta}
 \end{cases} ; \quad [\text{VI.10}]$$

per piccole oscillazioni $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin[\theta] \simeq \theta$; $\cos[\theta] \simeq 1 - \theta^2$; le [VI.10] diventano $m g \theta = -L \ddot{\theta}$

$$\begin{cases}
 m g (1 - \theta^2) - T = m L \dot{\theta}^2 \\
 g \theta = -L \ddot{\theta}
 \end{cases} ; \quad \text{utilizzando come condizioni iniziali } \theta[0] = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0 \text{ si ha}$$

$$\begin{cases}
 \theta(t) = \theta_0 \cos[\omega t] \\
 \dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega \sin[\omega t] \\
 T = m g (1 - \theta_0^2 \cos^2[\omega t]) + m L \theta_0^2 \omega^2 \sin^2[\omega t]
 \end{cases}$$

con $\omega = \sqrt{g/L}$

■ conservazione dell'energia

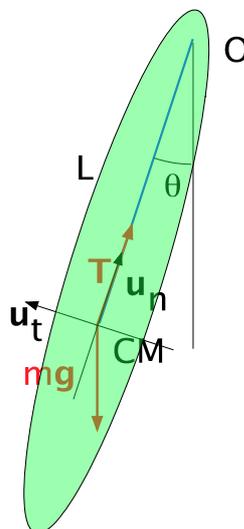
Utilizzando la conservazione dell'energia (le forze esterne sono conservative) si può ottenere la legge del moto ma non le espressioni esplicite delle forze.

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + m g h = \text{cost} = C$$

$$\frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m g L (1 - \cos[\theta]) = C \quad \text{derivando rispetto al tempo:}$$

$$m L^2 \ddot{\theta} + m g L \sin[\theta] \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin[\theta] = 0 \text{ da cui l'equazione del moto, come sopra.}$$

VI 5. pendolo composto



I sia il momento di inerzia del corpo rispetto al polo O perpendicolare al foglio, dove si svolge il moto. CM è il centro di massa ed L è la distanza tra il polo ed il centro di massa.

$$I \ddot{\theta} = - m g L \sin[\theta] \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m g L}{I} \theta = 0 \quad (\text{piccole oscillazioni})$$

la pulsazione del moto è $\omega = \sqrt{\frac{m g L}{I}}$; introducendo il raggio giratore $\varrho = \sqrt{I/m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g L}{\varrho^2}}$.

In modo analogo si arriva al medesimo risultato utilizzando la conservazione dell'energia come nel caso puntiforme.

VII corpo rigido

Tutti i punti di un corpo rigido mantengono distanze mutue costanti nel tempo. Questo fa sì che la posizione (e quindi il moto) di un corpo rigido siano determinati da 6 variabili indipendenti.

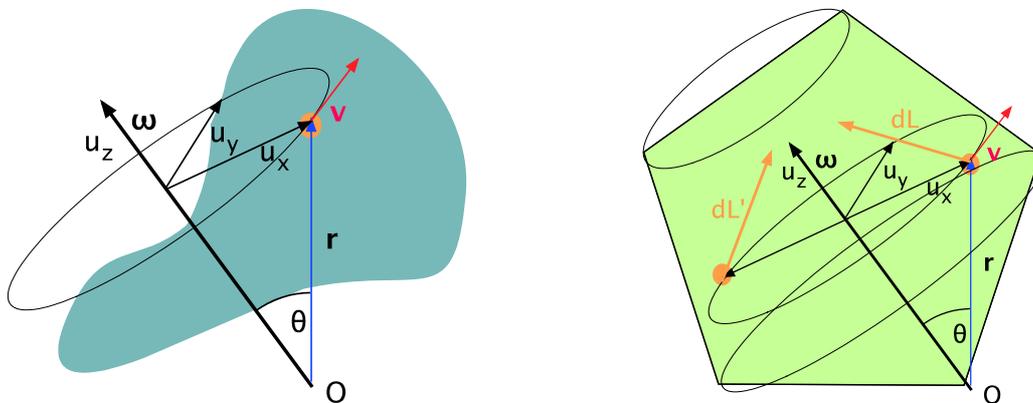
VII.1 centro di massa di un corpo rigido

Densità puntuale: $\varrho(\mathbf{x}) = \frac{dm(\mathbf{x})}{dV}$ con dV elemento di volume del corpo. Estendendo la [V.1] ad un corpo continuo:

massa del corpo: $M = \int_V \varrho dV;$ [VII.1]

vettore posizione del centro di massa: $\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \varrho dV;$ [VII.2]

VII.2 rotazione attorno ad un asse fisso



Ciascun elemento di massa $dm = \rho dV$ percorre orbite circolari attorno all'asse fisso con la medesima velocità angolare ω . La terna di assi $\{u_x, u_y, u_z\}$ è una terna locale rotante attorno al versore u_z ed ha u_x nella direzione della perpendicolare all'asse passante per l'elemento di volume considerato. Solo u_z è comune a ciascun elemento di volume ed è costante nel tempo, gli altri due versori dipendono da \mathbf{r} e ruotano con il corpo. L'espressione del momento angolare

lare totale può essere semplificata poichè ω non dipende da \mathbf{r} . Come si evince dalla figura a destra,

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) dm = \int_V \mathbf{r} \times \omega r \sin\theta \mathbf{u}_y dm = \omega \int_V \mathbf{r} \times r \sin\theta \mathbf{u}_y dm$$

Il vettore $\mathbf{r} \times \mathbf{u}_y$ giace nel piano $(\mathbf{u}_z, \mathbf{u}_x)$ ed è inclinato di θ rispetto a quest'ultimo. Il momento angolare locale $d\mathbf{L}$ può pertanto scriversi come somma delle sue componenti lungo \mathbf{u}_x e lungo \mathbf{u}_z :

$$d\mathbf{L} = |d\mathbf{L}| (\cos\theta \mathbf{u}_x + \sin\theta \mathbf{u}_z) \quad [\text{VII.3}]$$

Se l'asse di rotazione è di simmetria per il corpo rigido, allora due elementi di massa opposti rispetto all'asse hanno momento angolare con componenti radiali, cioè nella direzione di \mathbf{u}_x , opposte (cfr. $d\mathbf{L}$ e $d\mathbf{L}'$ nella figura a sinistra) mentre le componenti assiali, dirette come ω valgono $(r \sin\theta)^2 \omega dm$, per cui

$$\mathbf{L} = \omega \int_V (r \sin\theta)^2 dm = \omega \int_V d^2 \rho dV \hat{=} \omega \mathbf{I} \quad [\text{VII.4}]$$

essendo d la distanza del generico elemento di massa dm dall'asse di rotazione. L'integrale $\int_V d^2 \rho dV$ definisce il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. Si noti che il momento di inerzia dipende dalla distanza dall'asse di rotazione e quindi dipende dalla posizione dell'asse rispetto al corpo: assi di rotazione diversi hanno differenti momenti d'inerzia. In generale per un asse a non di simmetria la quantità $\omega \int_V d^2 \rho dV$ rappresenta la componente assiale del momento angolare, $\omega \int_V d^2 \rho dV = L_a$. Nei casi in cui valga la [VII.4], la [V.9] può essere così riscritta:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{I} \frac{d}{dt} \omega = \boldsymbol{\tau} \quad [\text{VII.3}]$$

Analogamente l'energia cinetica del corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso può esprimersi in termini del momento di inerzia:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{1}{2} \int_V (\omega d)^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad [\text{VII.4}]$$

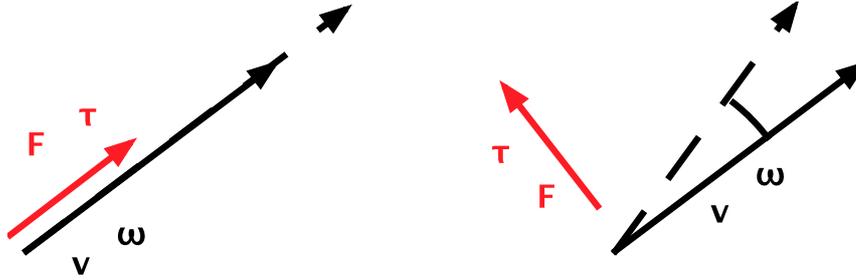
Potenza istantanea:

$$P = \frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} I 2 \omega \frac{d\omega}{dt} = \omega \boldsymbol{\tau};$$

$$dE_k = \omega \boldsymbol{\tau} dt; \quad \Delta E_k = \int \omega \boldsymbol{\tau} dt = \int \boldsymbol{\tau} d\theta$$

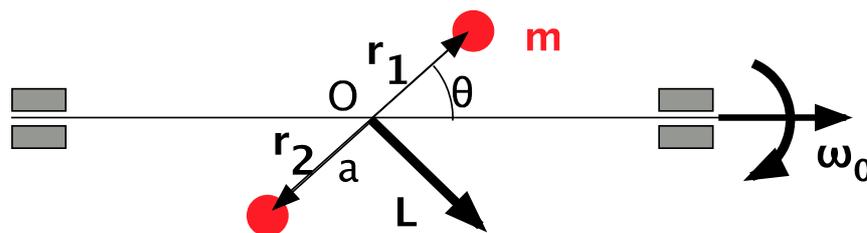
VII.3 momento d'inerzia e momento angolare

In generale: $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ con \mathbf{I} matrice 3×3 (tensore simmetrico): $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{i,j} \omega_j$ dove $I_{i,j} = I_{j,i}$. Il tensore può sempre essere reso diagonale (solo gli elementi lungo la diagonale principale sono non nulli) con una opportuna rotazione degli assi di riferimento. Gli assi così ottenuti sono assi di simmetria per il corpo e vengono chiamati assi principali d'inerzia. Lungo queste direzioni $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$. Se invece \mathbf{L} non è parallelo alla direzione di rotazione $\boldsymbol{\omega}$, ciò vuol dire che \mathbf{L} precede attorno a $\boldsymbol{\omega}$, quindi per la [VII.3] esiste un momento applicato $\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$. La situazione è analoga a quanto visto per la seconda legge di Newton e la relazione tra forza e velocità, come evidenziato dai due schemi sotto:



Quando $\mathbf{F} // \mathbf{v}$ ($\boldsymbol{\tau} // \boldsymbol{\omega}$) si ha una variazione del modulo di \mathbf{v} ($\boldsymbol{\omega}$) senza cambiamento nella direzione, mentre quando $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ ($\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{\omega}$) allora \mathbf{v} ($\boldsymbol{\omega}$) cambiano in direzione ma non in modulo. Se nel primo caso l'interpretazione è intuitiva, nel secondo l'interpretazione è più complicata, come appare dai due esempi che seguono.

■ rotatore asimmetrico



Un manubrio costituito da una coppia di masse puntiformi m è libero di ruotare attorno ad un asse rotante orizzontale. Esso è inclinato di un angolo θ rispetto all'asse e le strutture che lo sostengono sono tutte di massa trascurabile. Il momento angolare del sistema, quando l'asse ruota con velocità angolare ω_0

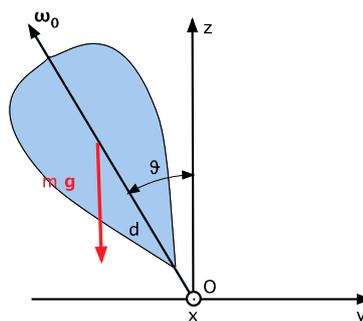
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \quad \text{ma} \quad \mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \quad \Rightarrow \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \quad \Rightarrow \mathbf{L} = 2 \mathbf{L}_1$$

Ora \mathbf{L} non è parallelo ad $\boldsymbol{\omega}_0$ quindi il vettore precessa attorno all'asse di rotazione e si ha dalla [II.3]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \tag{VII.5}$$

dal che si deduce che $\boldsymbol{\tau}$ è non nullo. Questo momento, rotante, è sviluppato dai supporti che sostengono l'asse di rotazione del sistema e diviene nullo solo quando il sistema è perfettamente equilibrato, ovvero $\mathbf{L} = 0$, cioè per $\theta = \pi/2$ e per $\theta = 0$.

■ trottola

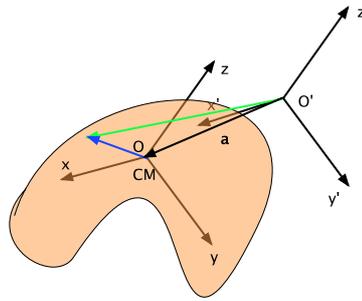


La trottola sia in rotazione attorno al suo asse principale, inclinato di θ rispetto alla verticale, con velocità angolare ω_0 . All'istante iniziale il suo asse giaccia nel piano $\hat{y}z$ ed il suo momento angolare rispetto ad O valga \mathbf{L}_0 . La forza di gravità esercita un momento $\boldsymbol{\tau}_0 = m g d \sin \theta \mathbf{u}_x$, sempre rispetto ad O. Vale la [VII.5] con una velocità angolare di precessione $\boldsymbol{\Omega}$ diretta come \mathbf{z} tale che $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\tau}_0$. Pertanto:

$$\Omega L_0 \sin \theta = \Omega I \omega_0 \sin \theta = m g d \sin \theta; \Rightarrow \quad \Omega = \frac{m g d}{I \omega_0} \quad \text{[VII.6]}$$

La velocità di precessione della trottola risulta inversamente proporzionale alla velocità di rotazione della trottola attorno al proprio asse ed al momento di inerzia della trottola.

VII.3 teorema di Huygens - Steiner



Si voglia calcolare il momento di inerzia I' del corpo per rotazioni attorno all'asse z' , noto il momento di inerzia I attorno all'asse z passante per il centro di massa O. Si consideri allora una terna di assi x', y' e z' centrati in O' paralleli ordinatamente agli assi x, y e z passanti per il centro di massa del corpo O. Il vettore \mathbf{a} congiungente O' ad O sia perpendicolare agli assi z e z' . Si ha allora, dalla definizione di momento di inerzia:

$$I' = \int_V r'^2 dm = \int_V \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' dm = \int_V (\mathbf{a} + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{r}) dm = \int_V a^2 dm + \int_V r^2 dm + 2 \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} dm$$

Il primo integrale vale $a^2 M$, il secondo è I ed il terzo è nullo per i seguenti motivi:

\mathbf{a} ed \mathbf{r} sono vettori perpendicolari all'asse z (e z') per costruzione. Quindi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = a_x r_x + a_y r_y$ e

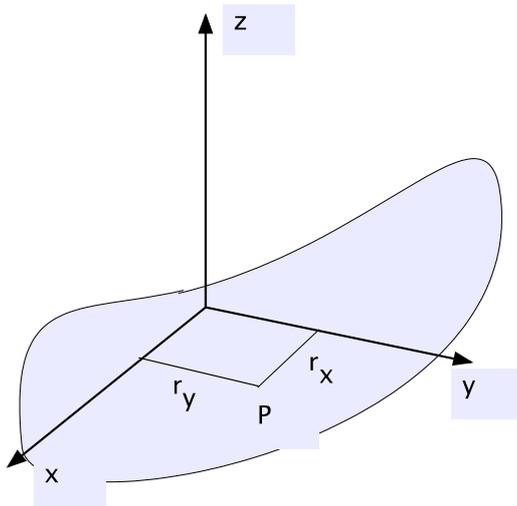
$$\int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} dm = a_x \int_V r_x dm + a_y \int_V r_y dm = a_x M r_{x,CM}^{CM} + a_y M r_{y,CM}^{CM} = 0$$

dove $r_{x,CM}^{CM}$ è la componente x del vettore posizione del centro di massa del corpo, nel sistema di riferimento del centro di massa, quindi identicamente nullo. Lo stesso vale per $r_{y,CM}^{CM}$. Concludendo:

$$I' = I + M a^2 \quad \text{[VII,7]}$$

Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse vale il momento di inerzia rispetto all'asse parallelo per il centro di massa più il prodotto della massa del corpo per la distanza al quadrato tra gli assi.

VII.4 lamine

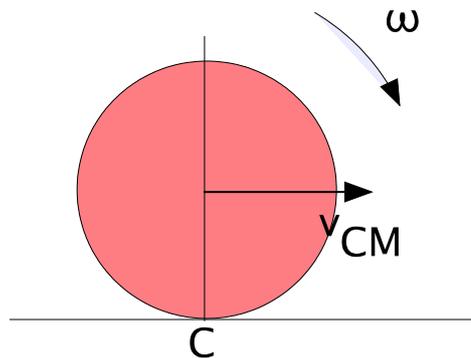


Sia data una lamina piana, caratterizzata da una certa superficie Σ e da una densità per unità di area σ tale che la sua massa $M = \int_{\Sigma} \sigma da$ essendo da l'elemento di area infinitesima. Si ha

$$I_z = \int_{\Sigma} (r_x^2 + r_y^2) \sigma da = \int_{\Sigma} r_x^2 \sigma da + \int_{\Sigma} r_y^2 \sigma da = I_y + I_x \quad [\text{VII.8}]$$

dove I_x, I_y, I_z rappresentano i momenti di inerzia rispetto ai tre assi. Questo teorema è comodo quando è possibile sfruttare la simmetria del corpo piano lungo assi perpendicolari, ad esempio un disco, un quadrato o un poligono piano.

VII.5 moto di rotolamento



Affinchè un corpo cilindrico di raggio R rotoli su un piano, la velocità del punto di contatto in C deve essere nulla. D'altra parte la velocità periferica del disco è ωR . Essa deve essere compensata esattamente dalla velocità del centro di massa v_{CM} . Quindi la condizione per il rotolamento è:

$$\omega R - v_{CM} = 0 \Rightarrow \omega R = v_{CM} \quad [\text{VII.9}]$$

VII.6 statica

Condizioni per l'equilibrio per un corpo rigido:

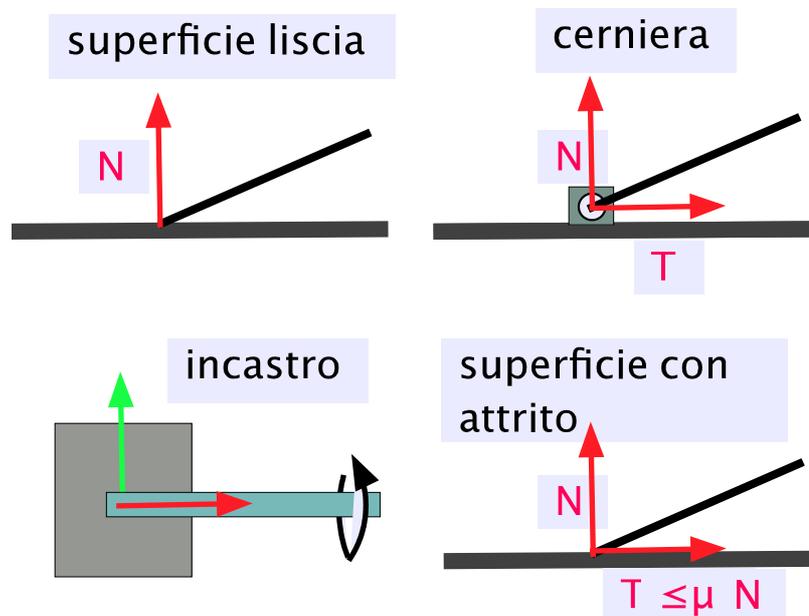
- $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow$ lo stato di moto del centro di massa non cambia
- $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = 0 \Rightarrow$ il momento angolare del corpo rimane costante

Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\tau} = 0$ per un polo O , allora $\boldsymbol{\tau} = 0$ per ogni polo O' . Infatti

$$\boldsymbol{\tau}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{OO'}) \times \mathbf{F}_i = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{r}_{OO'} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \boldsymbol{\tau}$$

VII.7 reazioni vincolari

- in assenza di attrito, la reazione è perpendicolare alla superficie
- aste incernierate: due reazioni indipendenti
- aste incastrate: due reazioni indipendenti più momento torcente di reazione
- appoggio con attrito: reazione radente μN (limite di scivolamento)



VIII termodinamica

VIII.1 temperatura e principio zero

Lo studio di sistemi complessi richiede l'introduzione di variabili macroscopiche capaci di descriverne le proprietà medie. Occorre stabilire criteri di equilibrio dei sistemi che permettano di confrontare sistemi diversi. Questo è il primo passo per lo studio dei sistemi termodinamici.

equilibrio termico: due sistemi sono in equilibrio termico quando, una volta posti in contatto, le loro proprietà macroscopiche non cambiano nel tempo.

principio zero: se due sistemi A e B sono ciascuno in equilibrio termico con un terzo sistema

C, allora sono in equilibrio termico tra loro.

temperatura: è una grandezza scalare che caratterizza i sistemi in equilibrio termico. Due sistemi sono in equilibrio termico tra loro se e solo se le loro temperature hanno il medesimo valore.

VIII.2 cenni di meccanica statistica: gas ideali

Lo studio dei sistemi gassosi in equilibrio è stato il primo, storicamente, ad essere sistematizzato. Fin dal XIX secolo sono state trovate leggi empiriche riassunte nella

$$pV = n R T \quad \text{[VIII.1]}$$

p è la pressione del gas (forza per unità di superficie che il gas esercita sulle pareti del contenitore), V è il volume, n è il numero di moli del gas (multipli di A molecole = $6.6 \cdot 10^{23}$ molecole/mole, A è il numero di Avogadro), R è la costante dei gas (≈ 8.31 J/K) e T la temperatura in gradi Kelvin (K). Un modo alternativo di scrivere la [VIII.1] è

$$pV = n R T = n A \frac{R}{A} T = N k T,$$

con $k =$ costante di Boltzman = $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K

Queste leggi valgono con buona accuratezza per il seguente modello di gas ideale:

1. Il gas è costituito da un gran numero di molecole supposte tutte uguali.
2. Le molecole sono in moto casuale ed obbidiscono alle leggi di Newton.
3. Le molecole urtano elasticamente con le pareti del contenitore e tra loro. L'interazione è di durata trascurabile.
4. Il volume proprio delle molecole è trascurabile rispetto al volume del contenitore.
5. Le molecole possono considerarsi particelle libere, non soggetta ad alcuna forza se non durante le collisioni.

calcolo cinetico della pressione di un gas ideale

La pressione di un gas ideale in equilibrio si può dedurre dalla velocità quadratica media delle parcelle costituenti il gas stesso. Si consideri un cubo di lato L ed una molecola che compie un tragitto che la porta a rimbalzare due volte contro due pareti opposte del cubo, ritornando quindi alla posizione iniziale. Le collisioni con le pareti modificano solo la componente della quantità di moto perpendicolare alla parete stessa da p_a a $p'_a = -p_a$. Un giro completo quindi comporta una variazione di quantità di moto data da $-4 p_a$ e viene completato in un tempo dato da $2 L / v_a$, essendo v_a la componente di velocità della molecola perpendicolare alla parete. La quantità di moto trasferita su una parete in un ciclo è $2 p_a$ e la forza che la singola molecola esercita sulla parete è $F = \frac{2 p_a v_a}{2 L} = \frac{m v_a^2}{L}$. La pressione totale sarà data dalla somma dei contributi delle singole particelle diviso per l'area del lato del contenitore, L^2 .

$$p = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^N \frac{m v_{a,i}^2}{L} = \frac{m}{L^3} \sum_{i=1}^N v_{a,i}^2 = \frac{m N \langle v_a^2 \rangle}{L^3} = \rho \langle v_a^2 \rangle = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle \quad \text{[VIII.2]}$$

poichè $\langle v^2 \rangle = \langle v_a^2 \rangle + \langle v_b^2 \rangle + \langle v_c^2 \rangle$ essendo a, b, c direzioni mutuamente perpendicolari. ρ rappresenta la densità del gas (massa/volume). In questa derivazione si trascurano le collisioni tra molecole. E' infatti sempre possibile trascurarle scegliendo volumi ideali dalle dimen-

sioni minori (o molto minori) del libero cammino medio tra le molecole (distanza media tra due successive collisioni). Inoltre poichè le collisioni tra molecole sono elastiche, per ogni molecola che subisce una variazione positiva di quantità di moto tra le due pareti ve ne sarà un'altra che subisce una variazione opposta, non modificando quindi il risultato finale.

energia cinetica media di un gas ideale: equipartizione dell'energia

Utilizzando la legge dei gas la [VIII.2] diviene

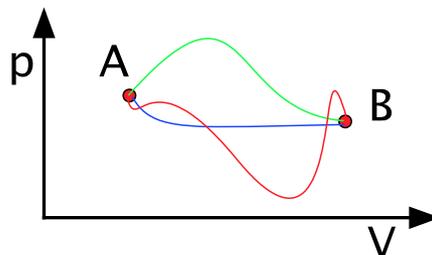
$$pV = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle V = N k T ; \quad \frac{1}{3} \frac{mN}{V} \langle v^2 \rangle V = N k T ;$$

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k T \Rightarrow \quad \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k T \quad \text{[VIII.3]}$$

L'energia cinetica media di una molecola in un gas ideale (monoatomico) in equilibrio alla temperatura T vale $\frac{3}{2} k T$. In alternativa, l'energia cinetica media per mole vale $\frac{3}{2} R T$.

Questo risultato può estendersi al caso di molecole poli-atomiche, assegnando una energia media per grado di libertà pari a $\frac{1}{2} k T$. In questo consiste il principio della equipartizione dell'energia. Quindi per molecole biatomiche l'energia media per molecole è $\frac{5}{2} R T$. Per un gas ideale l'energia cinetica rappresenta l'unica forma di energia interna. Ne consegue che per questi sistemi l'energia interna U è proporzionale alla temperatura assoluta del sistema, T .

lavoro di un gas



$$dL = F ds = \frac{F}{A} A ds = p A ds =$$

$p dV$

Le forze agenti sul gas sono non conservative. Lo si vede considerando una trasformazione di un gas tra A e B. Il lavoro fatto in una generica trasformazione che collega i due punti dipende infatti dal cammino $s = p(V)$

VIII.3 calore e primo principio

Definizione: il calore è l'energia scambiata tra un sistema e l'ambiente circostante a causa delle diverse temperature.

Convenzione: si consideri il calore fornito al sistema ed il lavoro fatto dal sistema come quantità positive.

Il bilancio energetico di un sistema termodinamico lungo una trasformazione è allora descritto dalla

$$\Delta U + L = Q \quad \text{[VIII.4]}$$

con ΔU variazione di energia interna, L lavoro fatto dal sistema e Q calore assorbito dal sistema. Questo è il primo principio della termodinamica ed esprime la conservazione dell'energia. La [VIII.4] si può ulteriormente specificare introducendo la nozione di capacità termica di un corpo, $C = \frac{dQ}{dT}$, che rappresenta la quantità di calore che deve essere assorbita per incrementare di una unità la temperatura del corpo stesso. Di qui anche il calore specifico per unità di massa $c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$, capacità termica di un corpo per unità di massa, ed il calore specifico molare $c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$, capacità termica di un corpo per mole. In quest'ultimo caso, applicato specialmente ai gas, si distingue tra calore specifico a volume costante c_v e calore specifico a pressione costante c_p .

Se una mole di gas ideale subisce una trasformazione infinitesima a volume costante si ha per il primo principio:

$dU + p dV = dQ$, ma, poichè $dV = 0$, dividendo per dT , $\frac{dU}{dT} = c_v$ ovvero, per più moli:

$$U = n c_v T \quad \text{[VIII.5]}$$

e dalla [VIII.3] si ha che $c_v = \frac{3}{2} R$ per i gas mono-atomici e $c_v = \frac{5}{2} R$ per i gas bi-atomici. *L'energia interna di un corpo è data dal prodotto tra capacità termica a volume costante e temperatura assoluta.*

Se invece n moli di gas ideale sono sottoposte ad una trasformazione infinitesima a pressione costante, dal primo principio [VIII.4], dalla legge dei gas [VIII.1] e dalla [VIII.5] si ricava:

$$\frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT} = \frac{dQ}{dT}; \quad p dV = n R dT \quad \Rightarrow \quad n c_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + n R = n(c_v + R) \quad \text{[VIII.6]}$$

Utilizzando la [VIII.4] e la [VIII.1] è possibile caratterizzare alcune trasformazioni notevoli sul piano pressione \rightarrow volume (piano di Clapeyron).

Trasformazioni isoterme: la temperatura è costante, quindi $p=nRT/V$. Le isoterme sono iperboli.

Trasformazioni isobare: la pressione è costante, $p = \text{costante}$. Le isobare sono rette orizzontali.

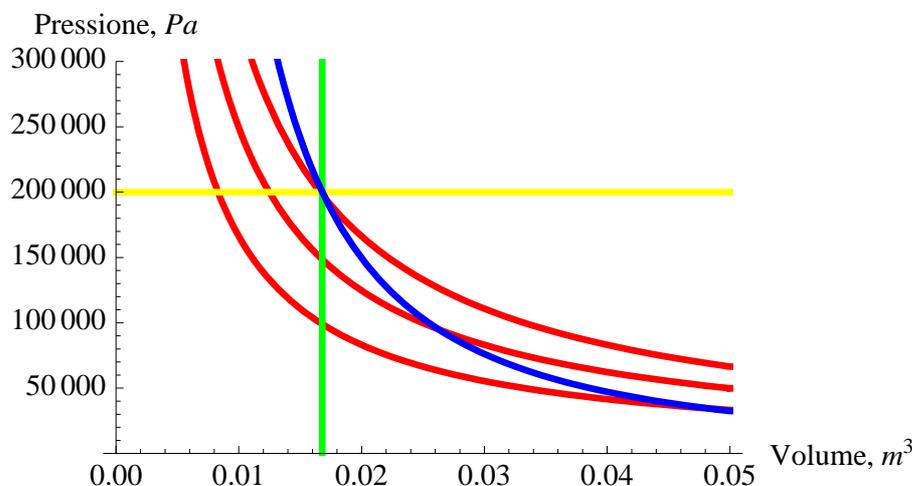
Trasformazioni isocore: il volume durante la trasformazione è costante. Le isocore sono rette verticali.

Trasformazioni adiabatiche: non viene scambiato calore durante la trasformazione. Utilizzando il primo principio:

$$\begin{aligned} n c_v dT + p dV &= 0; \quad p dV + V dp = n R dT \Rightarrow dT = \frac{p dV + V dp}{n R}; \\ n c_v \frac{p dV + V dp}{n R} + p dV &= 0; \quad p dV \left(1 + \frac{c_v}{R}\right) + \frac{c_v}{R} V dp = 0; \quad c_p p dV + c_v V dp = 0; \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{c_p}{c_v} \frac{dV}{V} \Rightarrow \log[p] = -\gamma \log[V] + \text{costante} \\ p V^\gamma &= \text{costante}, \quad \text{con } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \end{aligned} \quad \text{[VIII.7]}$$

Utilizzando la legge dei gas ideali si ottengono le forme alternative per l'equazione delle trasformazioni adiabatiche: $T V^{\gamma-1} = \text{costante}$; $p^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{costante}$;

Il grafico qui sotto riporta alcune trasformazioni termodinamiche per una mole di gas ideale monoatomico sul piano di Clapeyron. Le tre curve rosse sono, in ordine crescente, isoterme a 200, 300 e 400 K, la linea gialla è una isobara a 2×10^5 Pa, quella verde è una isocora a $1.60 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ e la linea blu è l'adiabatica per l'intersezione delle ultime tre curve.

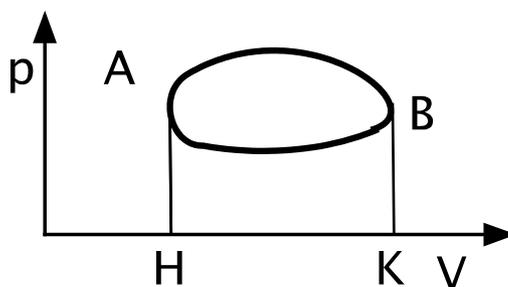


In generale le trasformazioni termodinamiche cadono in due grandi categorie:

trasformazioni reversibili: gli stati attraversati dal sistema lungo la trasformazione sono stati di equilibrio, stati cioè per i quali sono definite sempre tutte le variabili termodinamiche del sistema (esempio: temperatura, pressione, volume...). Da uno stato di equilibrio è sempre possibile transire ad un altro stato di equilibrio attraverso variazioni infinitesime delle variabili di stato. In questo modo è anche sempre possibile percorrere la trasformazione in senso inverso, di qui il nome 'reversibile' dato a queste trasformazioni.

trasformazioni irreversibili: trasformazioni in cui il sistema non è in equilibrio termodinamico. Alcune variabili termodinamiche non sono definite durante la trasformazione. Non possono quindi essere rappresentati su piani quali quello di Clapeyron. E non è possibile neanche definire un cammino a ritroso per gli stati del sistema.

VIII.4 proprietà delle trasformazioni cicliche: ciclo di Carnot



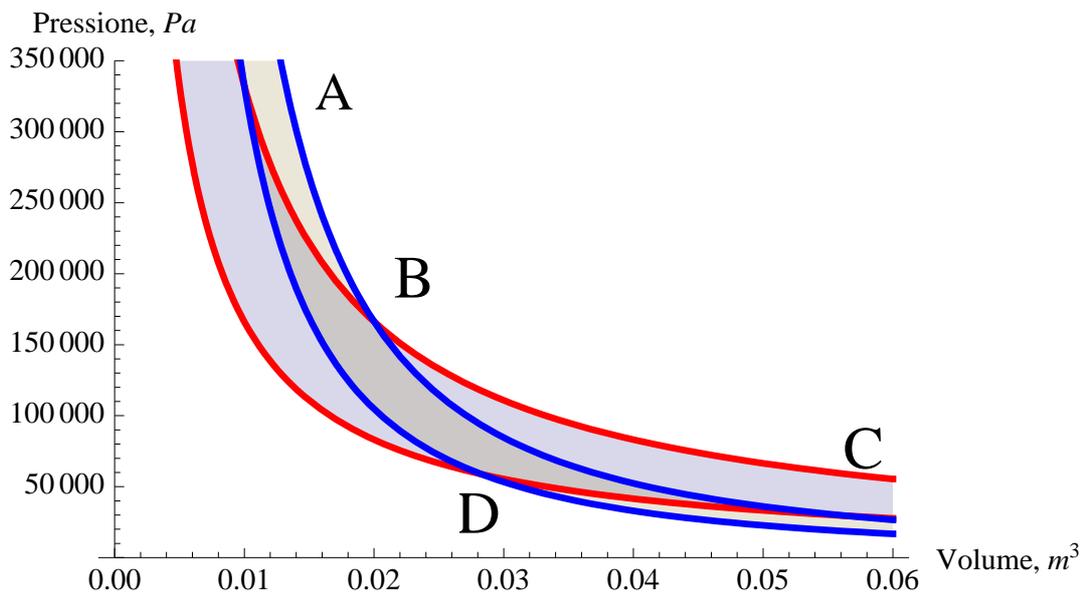
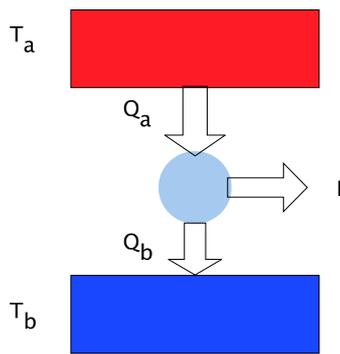
Si consideri la trasformazione termodinamica sul piano di Clapeyron illustrata in figura. Si tratta di una trasformazione ciclica che origina e termina per esempio in A compiendo un percorso chiuso. Stante le definizioni precedentemente date, in un ciclo della trasformazione non vi è variazione dell'energia interna, $\Delta U = 0$, quindi il primo principio recita che $L = Q$: il

lavoro fatto dal sistema uguaglia il calore totale scambiato in un ciclo. D'altra parte il lavoro fatto vale l'area conchiusa dalla trasformazione presa con segno positivo se la trasformazione è percorsa in senso orario, negativo in caso contrario. Le trasformazioni cicliche sono utilizzate per produrre lavoro: una figura di merito per queste trasformazioni è il rendimento η della macchina termica che realizza la trasformazione, ovvero il rapporto tra lavoro fatto in un ciclo e calore assorbito dalla macchina:

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = \frac{Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} \leq 1 \quad [\text{VIII.8}]$$

dove $Q = Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}}$ e, stante le convenzioni di cui sopra, $Q_{\text{ass}} > 0$ e $Q_{\text{ced}} < 0$.

Una macchina (teorica!) che realizza un ciclo di particolare importanza è la macchina di Carnot, costituita da un gas che transisce attraverso due isoterme e due adiabatiche, scambiando in un ciclo calore con due sorgenti:



Nel grafico qui sopra le isoterme ($T = 200$ e 400 K) sono in **rosso**, le adiabatiche (per $V = 0.01$ e 0.02 m^3) in **blu**. Il ciclo di Carnot è dato dall'intersezione delle quattro curve, ABCD. Il diagramma schematizza gli scambi di calore Q_a e Q_b delle due sorgenti a T_a e T_b con il gas e la produzione di lavoro L .

$$AB: Q_{AB} = Q_a = L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = n R T_a \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = n R T_a \log \frac{V_B}{V_A}; \quad [\text{VIII.9a}]$$

$$\text{CD: } Q_{\text{CD}} = Q_b = n R T_b \log \frac{V_D}{V_C} \quad [\text{VIII.9b}]$$

le trasformazioni adiabatiche portano a scrivere:

$$\text{BC: } T_a V_B^{\gamma-1} = T_b V_C^{\gamma-1} ; \quad \text{DA: } T_a V_A^{\gamma-1} = T_b V_D^{\gamma-1} ; \quad \text{ovvero}$$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

e questo risultato, riportato nelle [VIII.9] porta alle

$$Q_{\text{AB}} = -n R T_a \log \frac{V_A}{V_B}; \quad Q_{\text{CD}} = n R T_b \log \frac{V_A}{V_B}$$

$$\frac{Q_{\text{CD}}}{Q_{\text{AB}}} = - \frac{T_b}{T_a} \quad [\text{VIII.10}]$$

Questa espressione caratterizza il ciclo di Carnot e permette di riscrivere il rendimento della macchina in termini delle temperature di lavoro:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_b}{T_a} \quad [\text{VIII.11}]$$

VIII.5 secondo principio

Il secondo principio pone un limite alle trasformazioni possibili. Vi sono tre enunciati: i primi due sono:

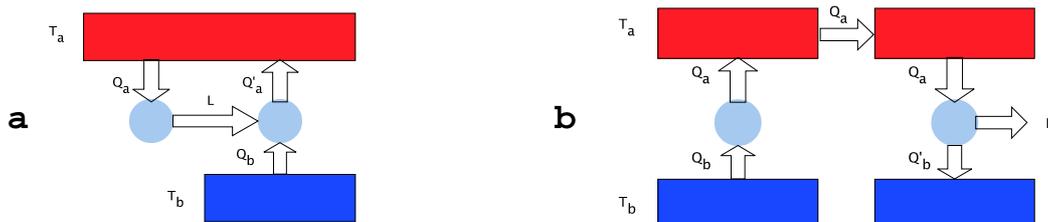
Enunciato di Lord Kelvin: non è possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la trasformazione di calore, estratto da una unica sorgente, in lavoro.

Enunciato di Clausius: non è possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il passaggio di calore da una sorgente a temperatura minore ad una sorgente a temperatura maggiore.

■ equivalenza tra i due enunciati

a) Se è vero Kelvin \rightarrow è vero Clausius

Per assurdo: sia Kelvin falso: allora esiste una macchina che trasforma $Q_a = L$ completamente in lavoro, prelevando calore alla temperatura T_a . Una macchina di Carnot che funziona all'inverso usa L per portare Q_b assorbito dalla sorgente a T_b . L'insieme delle due macchine nega Clausius poichè nel ciclo combinato l'unico risultato è il trasporto di calore Q_b da una sorgente fredda ad una calda.



b) Se è vero Clausius \rightarrow è vero Kelvin

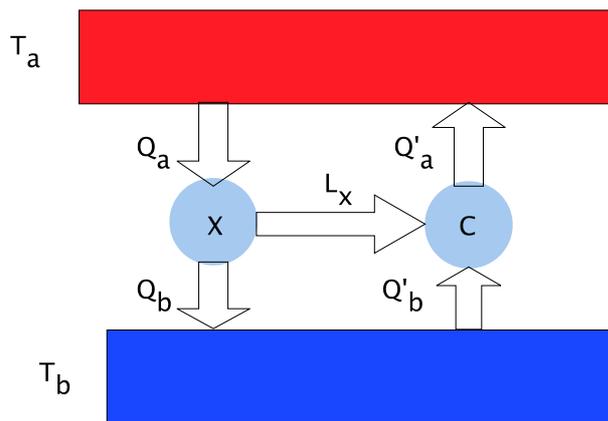
Per assurdo: sia Clausius falso: allora una macchina assorbe $Q_a = Q_b$ da una sorgente a T_b e la trasferisce alla sorgente a temperatura superiore T_a . La stessa quantità di calore viene assorbita

da una macchina di Carnot che lavora tra le medesime temperature che produce lavoro L . Nel ciclo composto delle due macchine viene prodotto lavoro da calore estratto da una sola sorgente, negando così l'enunciato di Kelvin.

VIII.6 teorema di Carnot

Il rendimento di ogni macchina termica che opera tra due temperature non può essere superiore a quello della macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature. Tutte le macchine termiche reversibili (operanti tra le medesime temperature) hanno lo stesso rendimento della macchina di Carnot.

Dimostrazione: per assurdo, si neghi l'enunciato. Allora esiste una macchina X che opera tra T_a e T_b con rendimento $\eta_X > \eta_C$ maggiore di quello della macchina di Carnot C che opera tra le medesime temperature. Si considera allora un ciclo composto da un ciclo diretto di X che produce lavoro L_X e un ciclo inverso di C che assorbe L_X e trasferisce calore dalla sorgente fredda a quella calda.



Si ha, secondo le convenzioni: $Q_a > 0; Q_b < 0; Q'_a < 0; Q'_b > 0;$

Il bilancio energetico della sorgente a T_b in un ciclo è: $-Q_b - Q'_b$

Il bilancio energetico della sorgente a T_a in un ciclo è: $-Q_a - Q'_a$

$$\text{ora } L_X = Q_a + Q_b = -Q'_a - Q'_b \Rightarrow Q_a + Q'_a = -Q_b - Q'_b$$

Quest'ultima uguaglianza dice che le quantità di calore scambiate complessivamente tra le due sorgenti in un ciclo sono uguali, come è ovvio. Ma poichè si è assunto $\eta_X > \eta_C$:

$$\eta_X > \eta_C \Rightarrow \frac{L_X}{Q_a} > \frac{L_X}{-Q'_a} \Rightarrow -Q'_a > Q_a \Rightarrow Q_a + Q'_a < 0$$

L'ipotesi $\eta_X > \eta_C$ implica però che il calore $|Q_a + Q'_a|$ viene trasferito alla sorgente ad alta temperatura T_a dalla sorgente più fredda T_b senza alcun'altra variazione nel sistema. Questo contraddice il secondo principio (Clausius). Quindi è errata l'ipotesi e vale

$$\eta_X < \eta_C \quad \text{[VIII.12]}$$

Poichè questo ragionamento può essere svolto anche all'inverso se X è reversibile (considerando un ciclo inverso per X ed uno diretto per C) ottenendo $\eta_X^{\text{rev}} > \eta_C$, si conclude che $\eta_X^{\text{rev}} = \eta_C$.

VIII.7 scala termodinamica delle temperature

Il teorema di Carnot afferma quindi che il rendimento di ogni macchina reversibile dipende solo dalle due temperature a cui il calore è scambiato:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_b|}{Q_a} = 1 - \frac{T_b}{T_a}$$

Si può definire allora una scala delle temperature ϑ a partire dai calori scambiati dalle macchine reversibili:

$$\frac{\vartheta_b}{\vartheta_a} = \frac{|Q_b|}{Q_a}$$

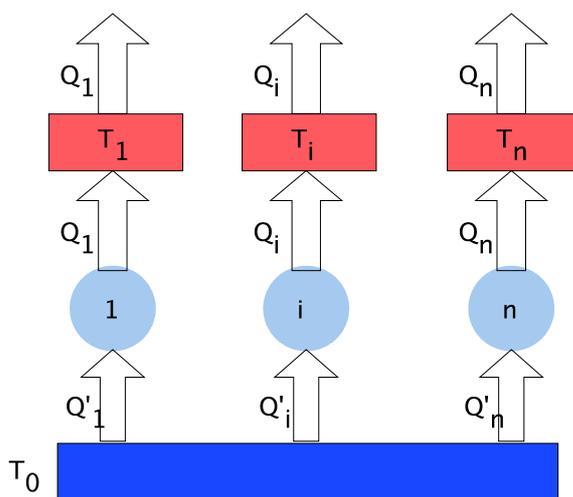
Utilizzando come punto di calibrazione il punto triplo dell'acqua e fissando la temperatura corrispondente $\vartheta_{tr} = 273.16 \text{ K}$, si ottiene la scala delle temperature termodinamiche:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{tr}} = \frac{|Q|}{Q_{tr}} \Rightarrow \vartheta = \frac{|Q|}{Q_{tr}} 273.16 \text{ K} \quad [\text{VIII.13}]$$

i cui valori coincidono così con quelli della scala Kelvin delle temperature assolute.

VIII.8 teorema di Clausius

Data una trasformazione ciclica in cui n sorgenti a temperature T_i ($i = 1, \dots, n$) scambiano complessivamente le quantità di calore Q_i in un ciclo, si ha che $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$ ed il segno di uguale vale se la trasformazione è reversibile.



Dimostrazione: si considerano n cicli di Carnot $\{1, \dots, n\}$ che forniscono alle n sorgenti alle temperature T_1, \dots, T_n ordinatamente le medesime quantità di calore scambiate in un ciclo. Gli n cicli di Carnot hanno la sorgente a temperatura T_0 in comune con cui scambiano le quantità di calore Q'_1, \dots, Q'_n , ordinatamente. Si conviene che $Q'_i > 0$ e $Q_i < 0$ se diretti come in figura, secondo la convenzione del ciclo di Carnot.;

Per ciascuno di essi vale la:

$$\frac{-Q_i}{Q'_i} = \frac{T_i}{T_0} \Rightarrow \frac{-Q_i}{T_i} = \frac{Q'_i}{T_0} \quad i = 1, \dots, n$$

sommando su tutti i cicli si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = - \frac{1}{T_0} \sum_{i=1}^n Q'_i$$

ma $-\sum_{i=1}^n Q'_i$ rappresenta la quantità di calore estratto dalla sorgente a temperatura T_0 . Essa non può essere positiva, altrimenti il ciclo complessivo costituito da 1 ciclo delle n macchine di Carnot e da un ciclo della macchina in questione. Si deduce allora che

$$-\sum_{i=1}^n Q'_i \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \geq 0 \quad \text{[VIII.14]}$$

Se la macchina è reversibile si ottiene il medesimo risultato quando la macchina funziona all'inverso quindi si deve concludere che il segno di uguaglianza vale se la macchina è reversibile.

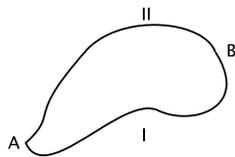
Il teorema di Clausius si applica anche a trasformazioni cicliche con una distribuzione continua di sorgenti. In questo caso alla [VIII.14] si sostituisce la:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{[VIII.15]}$$

dove dQ rappresenta la quantità di calore infinitesimo scambiato con la sorgente alla temperatura T .

VIII.9 proprietà delle trasformazioni reversibili cicliche: entropia

Per qualsiasi trasformazione ciclica vale la [VIII.15]. Se la trasformazione è anche reversibile, indicati con A e B due stati distinti qualsiasi della trasformazione si ha



$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A_I}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B_{II}}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

dove I e II sono i due rami del percorso ciclico tra A e B. Da questa relazione discende che

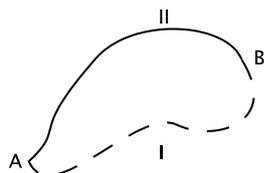
$$\int_{A_I}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A_{II}}^B \frac{dQ}{T}$$

cioè il fatto che per qualsiasi trasformazione reversibile che collega A a B l'integrale in questione non cambia. Questo significa anche che l'integrale

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}} \doteq S(B) - S(A) \quad \text{[VIII.16]}$$

lungo una qualsiasi trasformazione reversibile dipende solo dalle coordinate degli estremi. Esso definisce pertanto una nuova funzione di stato, l'entropia S che è definita dalla [VIII.16] a meno di una costante additiva.

Si consideri ora una trasformazione ciclica costituita da due trasformazioni tra gli estremi A e B, il primo (I) irreversibile ed il secondo (II) reversibile. Si avrà allora per il teorema di Clausius:



$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A_I}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B_{II}}^A \frac{dQ}{T} < 0; \quad \int_{A_I}^B \frac{dQ}{T} + S(A) - S(B) < 0;$$

$$\Rightarrow S(B) - S(A) > \int_{A_I}^B \frac{dQ}{T} \quad \text{[VIII.17]}$$

La variazione di entropia tra due stati distinti è sempre maggiore dell'integrale $\int \frac{dQ}{T}$ che connette i due stati lungo trasformazioni irreversibili.

In particolare, se si suppone il sistema in questione isolato, non sono possibili scambi di calore, quindi $dQ = 0$ e si ha in questo caso



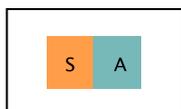
$$S(B) - S(A) > 0 \quad \text{[VIII.18]}$$

Questa espressione trova molteplici interpretazioni. Innanzitutto se un sistema è isolato, cioè non scambia calore con l'esterno, in generale esso potrà compiere solo trasformazioni spontanee (e quindi irreversibili) verso uno stato finale di equilibrio. In questo cammino esso potrà transire solo attraverso stati ad entropia sempre maggiore. Quando avrà raggiunto l'equilibrio il sistema non evolve ulteriormente e la sua entropia raggiunge il valore massimo.

Un sistema isolato evolve verso stati ad entropia maggiore. Quando l'equilibrio è raggiunto l'entropia è la massima possibile per il sistema.

■ **Interazione sistema - ambiente**

Un sistema termodinamico S insieme all'ambiente A che lo circonda può essere considerato un sistema isolato. Il sistema $S \cup A$ evolverà quindi verso lo stato a massima entropia:



$$\Delta(S_S + S_A) = 0 \Rightarrow \Delta S_S = -\Delta S_A \quad \text{[VIII.19]}$$

E' possibile avere una diminuzione di entropia del sistema a spese dell'aumento di entropia dell'ambiente con cui il sistema interagisce. Se le trasformazioni in gioco sono reversibili, allora non si ha aumento di entropia.

VIII.10 formulazione generale del secondo principio in termini di entropia

In qualsiasi trasformazione termodinamica che evolva tra due stati di equilibrio, l'entropia dell'insieme del sistema e dell'ambiente non può diminuire.

■ **equivalenza con l'enunciato di Lord Kelvin**

Per assurdo, si neghi l'enunciato di Kelvin. Allora si ottiene lavoro L da una unica sorgente a temperatura T che cede una quantità di calore $Q = L$; in un ciclo $\Delta S_{ciclo} = 0$ per definizione. L'ambiente (sorgente a temperatura T) cede Q quindi la sua variazione di entropia vale $\Delta S_A = -\frac{Q}{T} = \Delta S_{totale}$. Si avrebbe quindi un decremento di S_{totale} negando così l'enunciato.

■ equivalenza con l'enunciato di Clausius

Di nuovo, negando l'enunciato di Clausius è possibile realizzare una macchina ciclica che estrae calore Q da $T_b < T_a$ cedendolo ad una sorgente a temperatura T_a . Il motore è ciclico e la sua variazione di entropia è nulla. L'ambiente subisce invece una variazione di entropia pari a quella delle due sorgenti

$$\Delta S_{\text{totale}} = -\frac{Q}{T_b} + \frac{Q}{T_a} = Q\left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}\right)$$

che è negativa, il che nega di nuovo l'enunciato.