APPLICAZIONI LINEARI

ESERCIZI

1. Stabilire se le seguenti applicazioni sono applicazioni lineari:

a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f(x,y) = (senx, y)$, $\quad f(x,y) = (x-y, x+y)$;
b) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\quad f(x,y) = ax + by$, $\quad f(x,y) = xy$;
c) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\quad f(z) = \bar{z}$, $\quad f(z) = z^2$;
d) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f(x,y,z) = (x-z, 2z+y)$, $\quad f(x,y,z) = (x, 2y, y+2)$;
e) $f: M_{\mathbf{R}}(3) \to \mathbf{R}$, $\quad f(A) = trA = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\quad f(A) = |A|$.

2. Sia $\mathbf{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in x di grado $\leq n$. Sia $D: \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_{n-1}[x]$ l'applicazione che ad ogni polinomio $p(x)$ associa la sua derivata prima $D(p(x))$. Verificare che D é un'applicazione lineare, stabilire se é iniettiva o suriettiva.

3. Sia $M_{\mathbf{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2. Si consideri l'applicazione lineare $f: M_{\mathbf{R}}(2) \to M_{\mathbf{R}}(2)$ data da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}.$$

Determinare dimensione e base dei sottospazi $Kerf$ ed Imf.

4. Sia $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, l'applicazione lineare data da $f(x,y) = (x, x-y, 2y)$.

a) Determinare le immagini dei vettori della base standard $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbf{R}^2$;
b) scrivere la matrice rapprsentativa di f rispetto alle basi standard di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$;
c) determinare dimensione e base dei sottospazi $Kerf$ e Imf.

5. Sia $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Determinare le equazioni dei sottospazi $Kerf$ e Imf;
b) determinare $f^{-1}(u)$, dove $u = (2,2,0)$;
c) determinare le immagini attraverso f dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$: $V = span(v)$ e $W = span(v,w)$, dove $v = (1,0,1)$ e $w = (0,1,2)$.

6. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbf{R}^3$, si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_2) = e_2 + e_3 \qquad f(e_3) = e_1 - e_3.$$

a) Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$;
b) scrivere le equazioni dei sottospazi $Kerf$ e Imf.

7. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbf{R}^4$. Costruire un' applicazione lineare $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ con le seguenti proprietá : $Kerf = span(e_1, e_2)$ e $Imf = span(e_1, e_2)$. Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

8. Sia $M_{\mathbf{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2. Si consideri la seguente applicazione lineare $f\colon M_{\mathbf{R}}(2) \to M_{\mathbf{R}}(2)$:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alla base standard di $M_{\mathbf{R}}(2)$;
b) deteminare dimensione e base dei sottospazi $Kerf$ e Imf;
c) provare che f é un automorfismo, determinare f^{-1}.

9. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base standard di $\mathbf{R}^2$. Si considerino le seguenti applicazioni lineari: $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ data da $f(x,y) = (x-y, y)$ e $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $g(e_1) = 2e_1 + e_2$ e $g(e_2) = e_2$.

a) Scrivere le matrici rappresentative di f e g rispetto alla base standard $\mathcal{B}$;
b) determinare le applicazioni lineari $f \circ g$ e $g \circ f$;
c) determinare i sottospazi $Kerf$, $Kerg$, $Ker(f \circ g)$ e $Ker(g \circ f)$.

10. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un automorfismo. Dimostrare che:

a) l'immagine attraverso f di una retta r é una retta $f(r)$;
b) se r e s sono due rette incidenti, le loro immagini $f(r)$ e $f(s)$ sono rette incidenti;
c) se r e s sono due rette parallele, le loro immagini $f(r)$ e $f(s)$ sono rette parallele.

11. Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x + z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - z = 1 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

12. Determinare per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare ammette soluzioni e calcolare, al variare di h, la dimensione della varietá lineare delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = h \\ x - 2y - z + 3t = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z + (h-1)t = 0 \end{cases}$$

13. Determinare, al variare del parametro reale h, la dimensione dello spazio lineare delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h-1 & -1 & -h \\ h^2 & 1 & -h^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

14. Determinare per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare ammette soluzioni e calcolare, al variare di h, la dimensione della varietá lineare delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} (2h-1)x - hy + 2z = 2 - h \\ hx - y + (h+1)z = 2h - h^2 \end{cases}$$