Circuiti del primo ordine

Un circuito del primo ordine è caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine

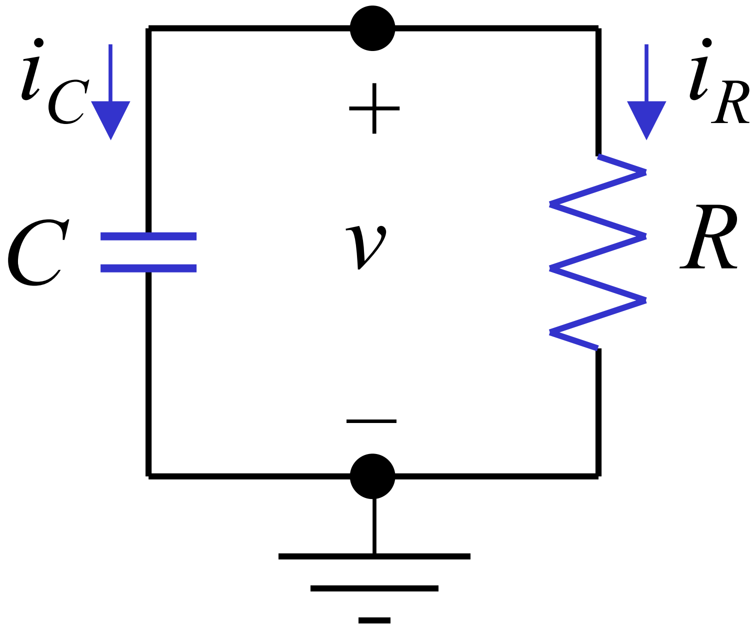
I circuiti del primo ordine sono di due tipi:
RL o *RC*

Circuiti del primo ordine

L'eccitazione può essere di due tipi

- autonoma: il circuito *non comprende generatori indipendenti* ed evolve nel tempo grazie all'energia immagazzinata nel condensatore (RC) o nell'induttore (RL)
- forzata: il circuito *comprende generatori indipendenti* che ne determinano il comportamento nel tempo

Circuito RC autonomo



Ipotesi:

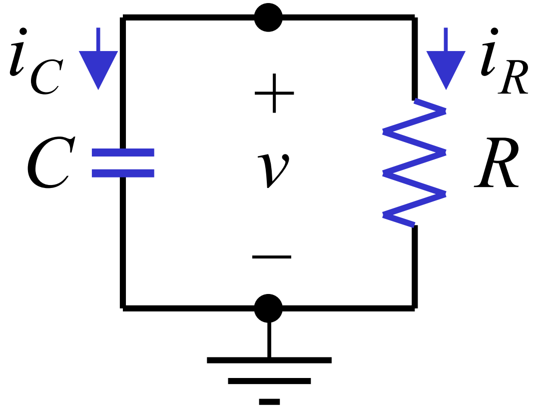
$$v(0) = V_0$$

$$w(0) = \frac{1}{2} C \cdot V_0^2$$

$$\boxed{v(t) = ? \quad (\text{per } t > 0)}$$

Circuito *RC* autonomo

$$i_C + i_R = 0$$



$$C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/RC}$$

$$v(0) = V_0$$

$$\boxed{v(t) = V_0\mathrm{e}^{-t/RC}}$$

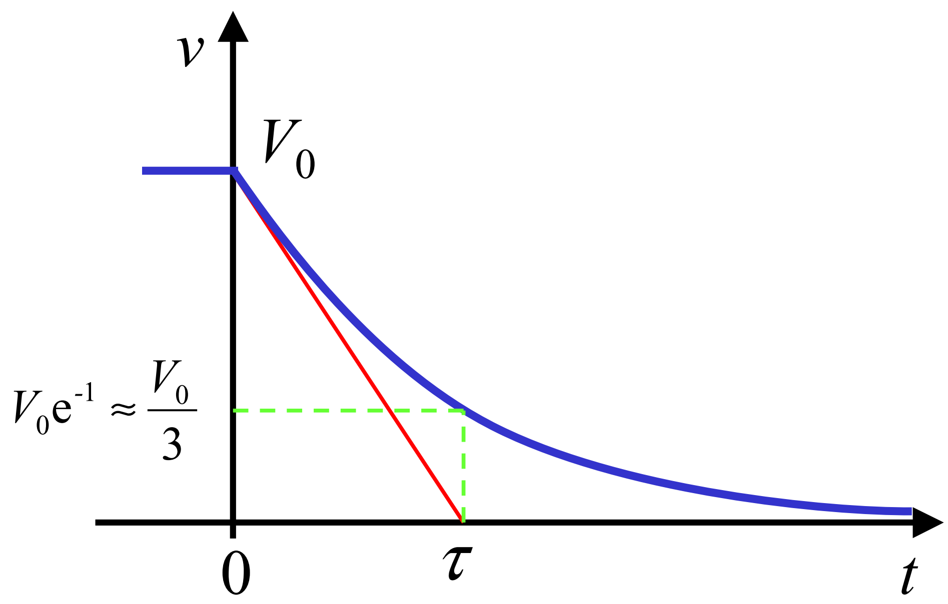
Circuito *RC* autonomo: risposta naturale

La risposta naturale rappresenta il comportamento intrinseco di un circuito, senza l'intervento di sorgenti esterne di eccitazione

$$v(t) = V_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$

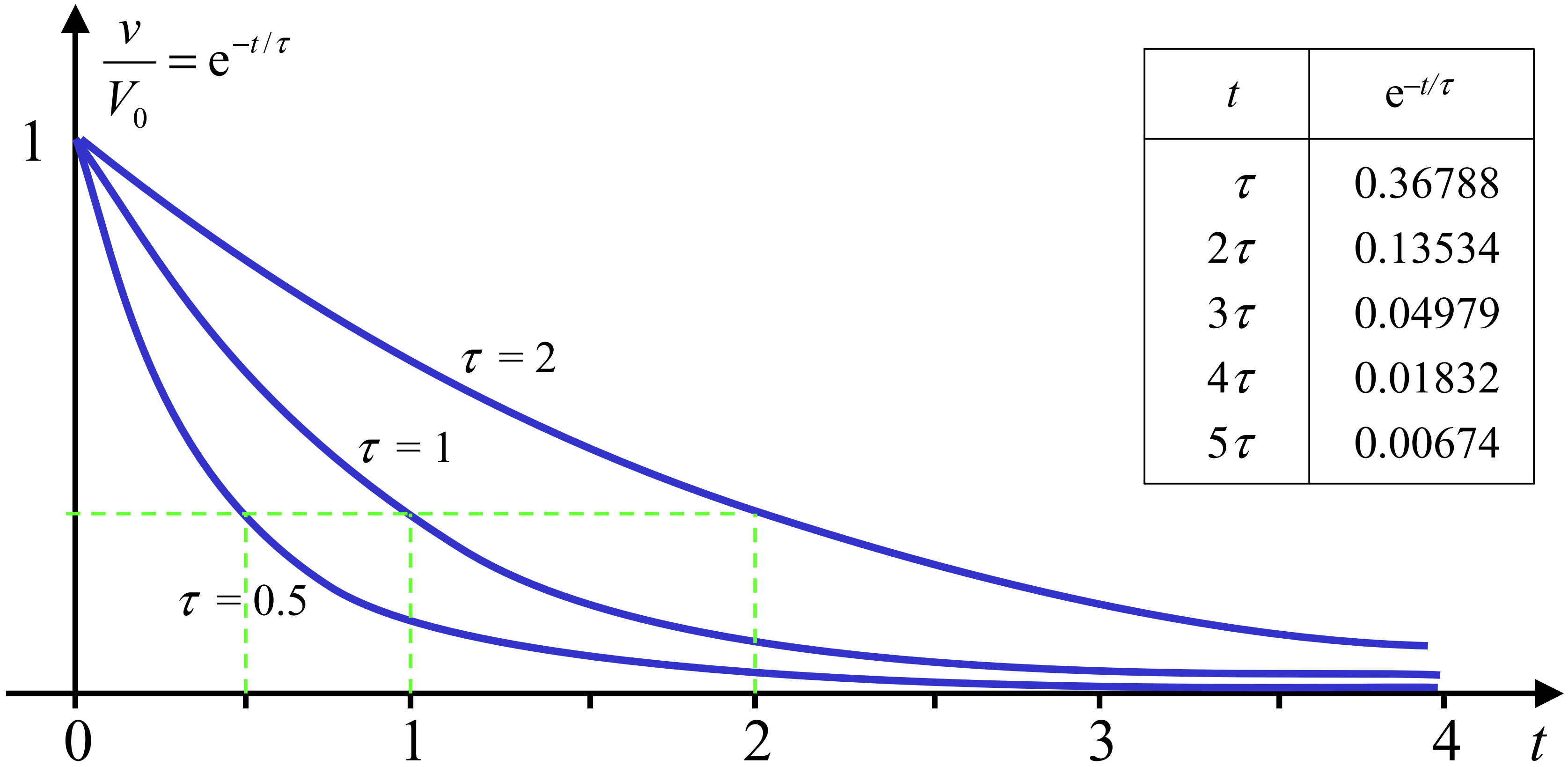
costante di tempo



Circuito *RC* autonomo: costante di tempo

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

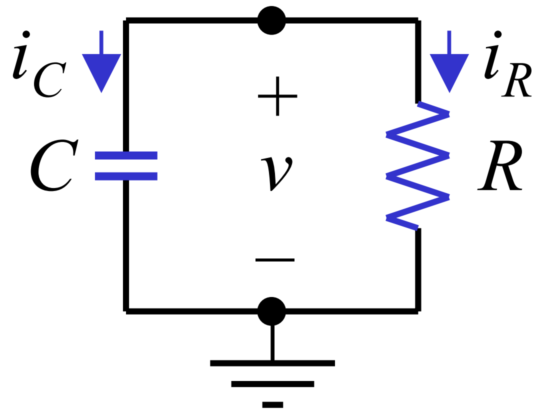
$$\tau = RC$$
costante di tempo



t	$e^{-t/\tau}$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674

Circuito *RC* autonomo: potenza ed energia

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$



Potenza dissipata nel resistore:

$$p(t) = v \cdot i_R = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

Energia assorbita dal resistore fino all'istante t:

$$w_R(t) = \int_0^t p \cdot dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} \cdot dt = \frac{1}{2} C \cdot V_0^2 (1\text{-}e^{-2t/\tau})$$

$$w_R(\infty) = \frac{1}{2} C \cdot V_0^2 = w(0)$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo ($t >> \tau$) il resistore ha assorbito tutta l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale ($t = 0$)

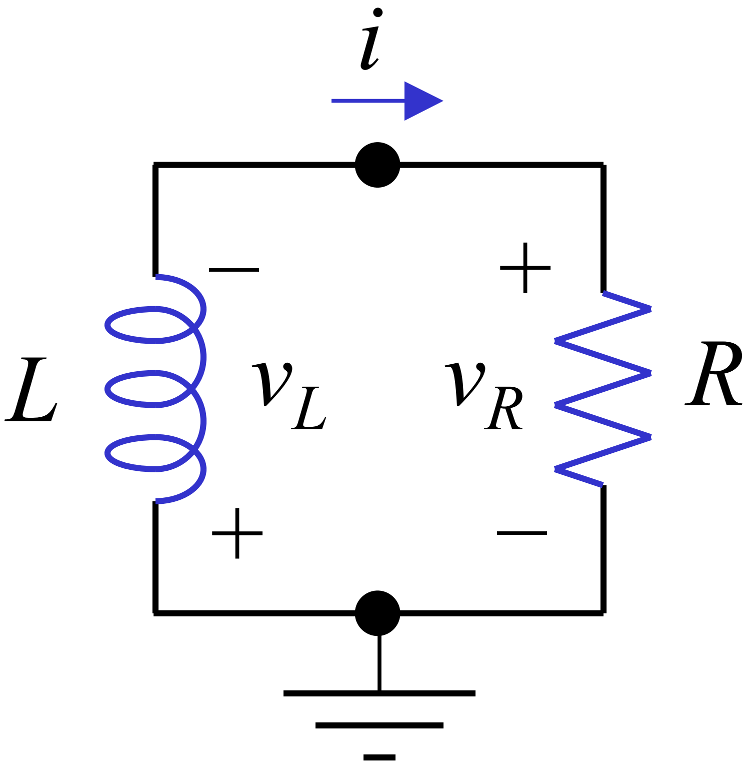
Circuito RC autonomo: riassunto

Il calcolo della risposta naturale di un circuito RC autonomo richiede:

- la conoscenza o il calcolo della tensione sul condensatore all'istante iniziale (V_0)
- il calcolo della resistenza equivalente R posta in parallelo al condensatore per la determinazione della costante di tempo $\tau = RC$

$$\boxed{v(t) = V_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Circuito RL autonomo



Ipotesi:

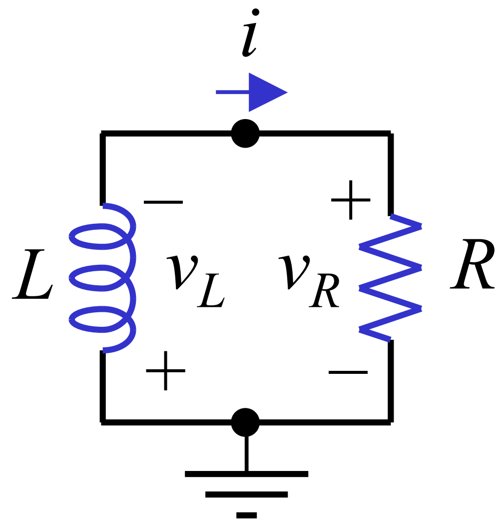
$$i(0) = I_0$$

$$w(0) = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2$$

$$\boxed{i(t) = ? \quad (\text{per } t > 0)}$$

Circuito *RL* autonomo

$$v_L + v_R = 0$$



$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = A\mathrm{e}^{-Rt/L} \quad \Leftarrow \quad i(0) = I_0$$

$$\boxed{i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-Rt/L}}$$

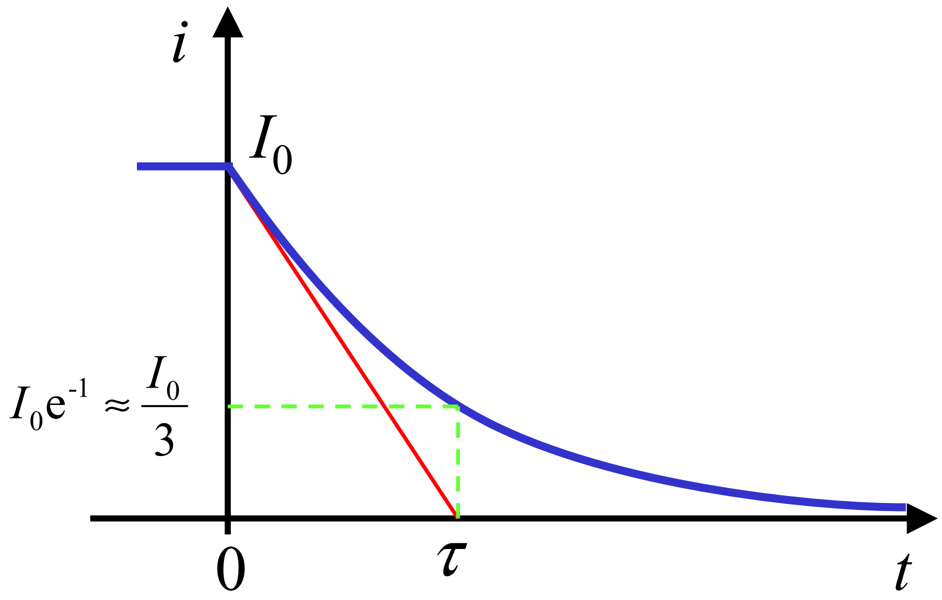
Circuito *RL* autonomo: risposta naturale

La risposta naturale rappresenta il comportamento intrinseco di un circuito, senza l'intervento di sorgenti esterne di eccitazione

$$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

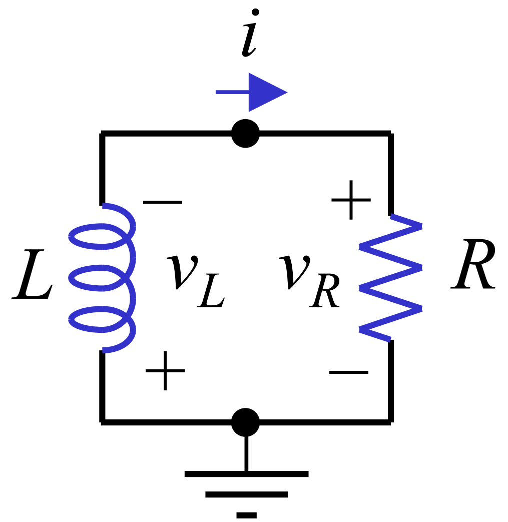
$$\tau = L/R$$

costante di tempo



Circuito *RL* autonomo: potenza ed energia

$$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad v_R(t) = R \cdot i = R \cdot I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$



Potenza dissipata nel resistore:

$$p(t) = v_R \cdot i = R \cdot I_0^2 \mathrm{e}^{-2t/\tau}$$

Energia assorbita dal resistore fino all'istante t:

$$w_R(t) = \int_0^t p \cdot dt = \int_0^t R \cdot I_0^2 \mathrm{e}^{-2t/\tau} \cdot dt = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 (1\text{-}\mathrm{e}^{-2t/\tau})$$

$$w_R(\infty) = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 = w(0)$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo ($t >> \tau$) il resistore ha assorbito tutta l'energia immagazzinata nell'induttore all'istante iniziale ($t = 0$)

Circuito *RL* autonomo: riassunto

Il calcolo della risposta naturale di un circuito *RL* autonomo richiede:

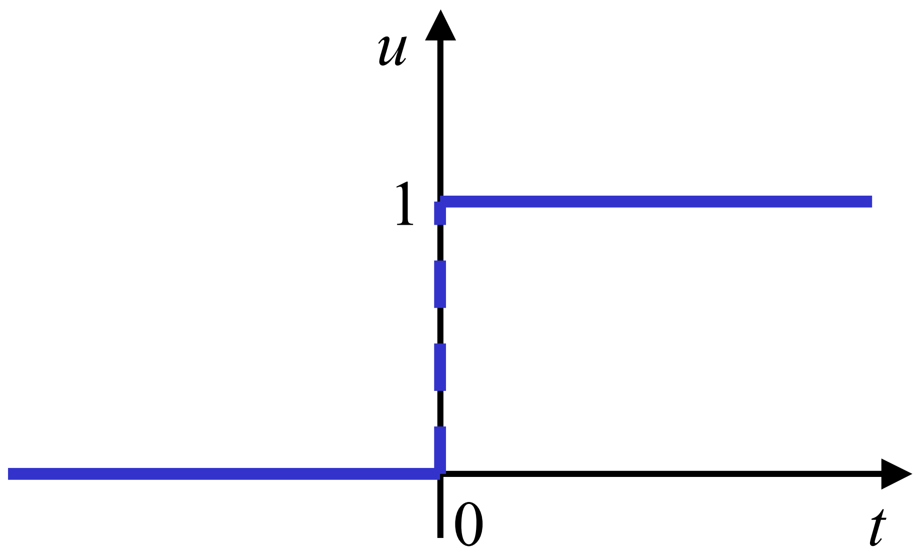
- la conoscenza o il calcolo della corrente sull'induttore all'istante iniziale (I_0)
- il calcolo della resistenza equivalente R posta in parallelo all'induttore per la determinazione della costante di tempo $\tau = L/R$

$$\boxed{i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

La “funzione gradino unitario”

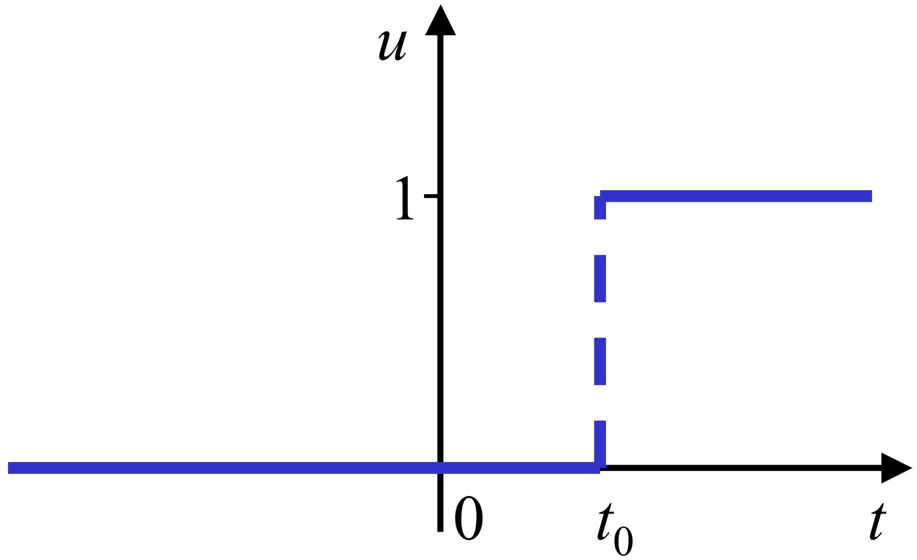
La funzione a gradino unitario è una funzione discontinua.
Essa viene utilizzata per rappresentare variazioni molto rapide di tensione o corrente

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



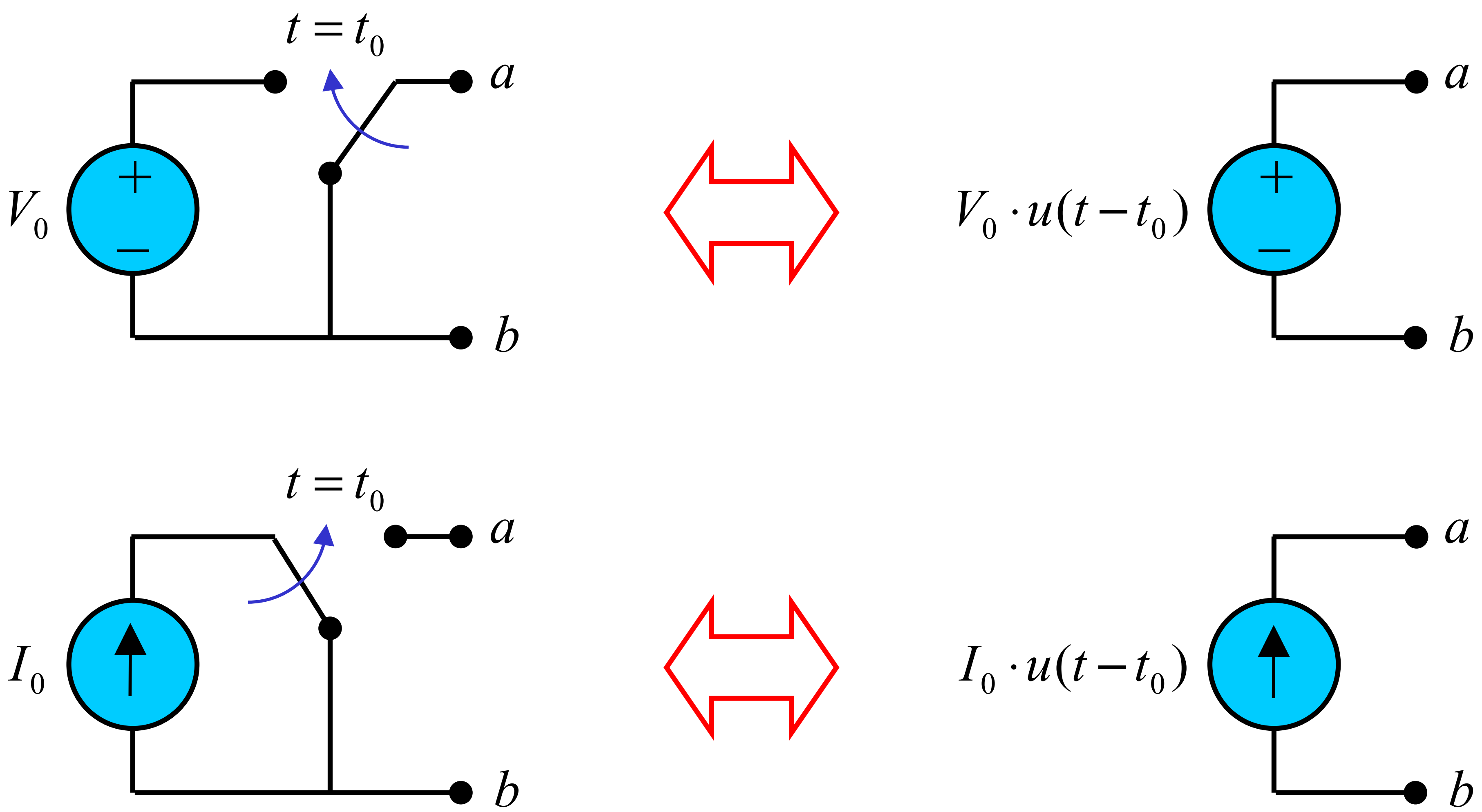
La "funzione gradino unitario"

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

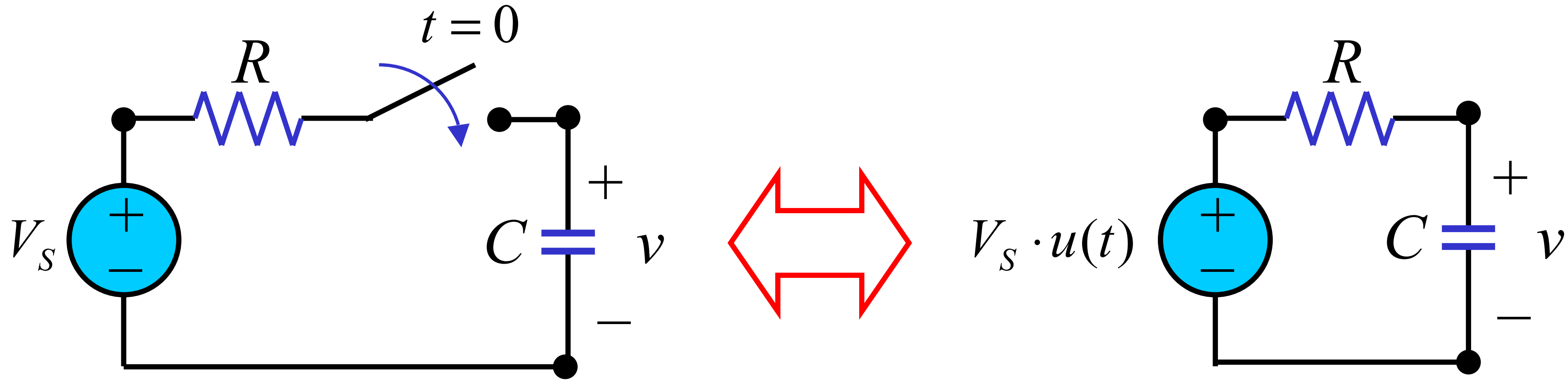


$$V(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ V_0 & t>t_0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad V(t)=V_0\cdot u(t-t_0)$$

La “funzione gradino unitario”



Risposta al gradino di un circuito *RC*

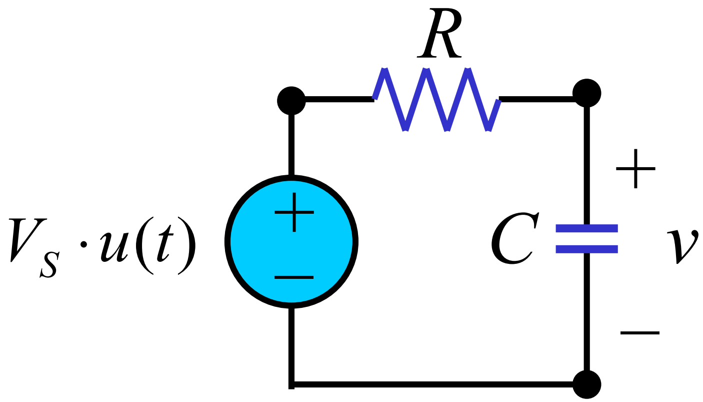


Ipotesi:

$$v(0^-) = V_0$$

$$\boxed{v(t) = ?}$$

Risposta al gradino di un circuito RC: $t \leq 0$



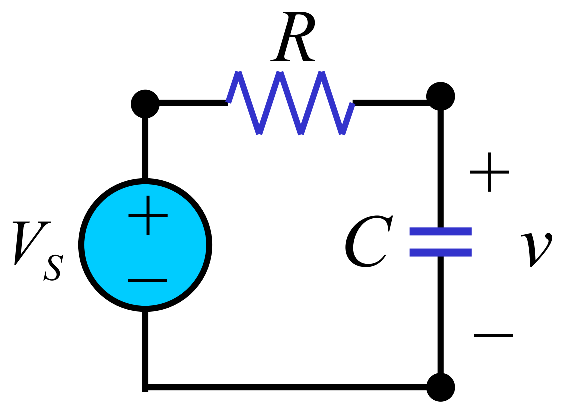
v non può cambiare istantaneamente:

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0$$

Risposta al gradino di un circuito RC: $t > 0$

$$C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S}{RC} = 0$$



$$\frac{d(v - V_S)}{dt} + \frac{v - V_S}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) - V_S = A e^{-t/RC} \quad \Leftarrow \quad v(0^+) = V_0$$

$$\boxed{v(t) = V_S + (V_0 - V_S)\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = RC}$$

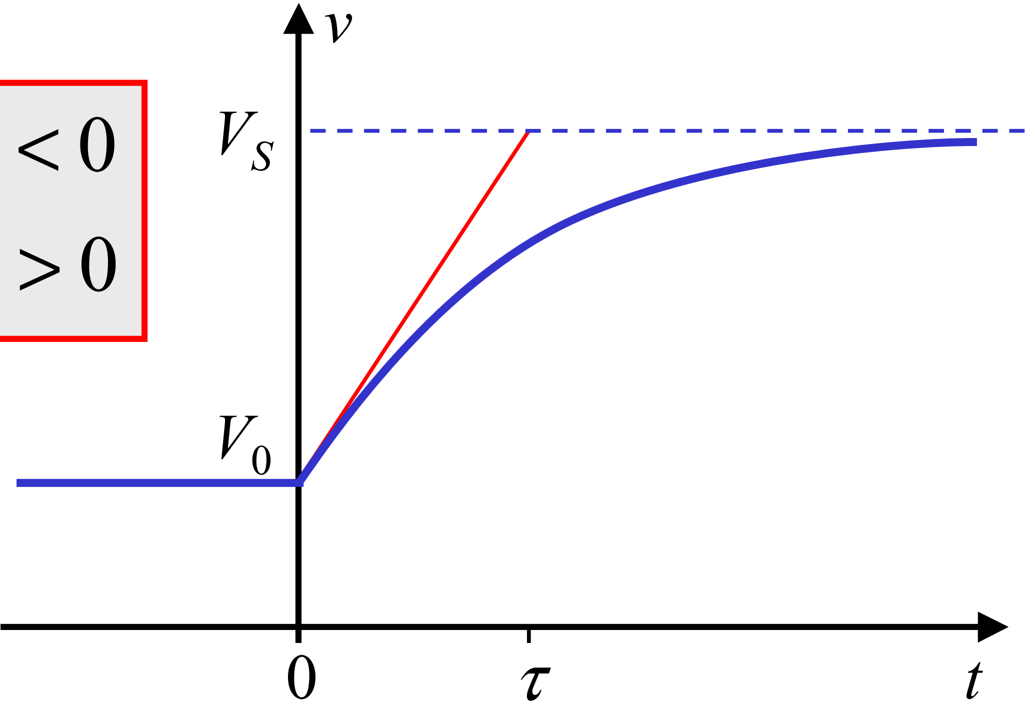
Circuito *RC*: risposta completa

La risposta completa rappresenta il comportamento di un circuito alla applicazione improvvisa di un generatore, supponendo il condensatore già carico

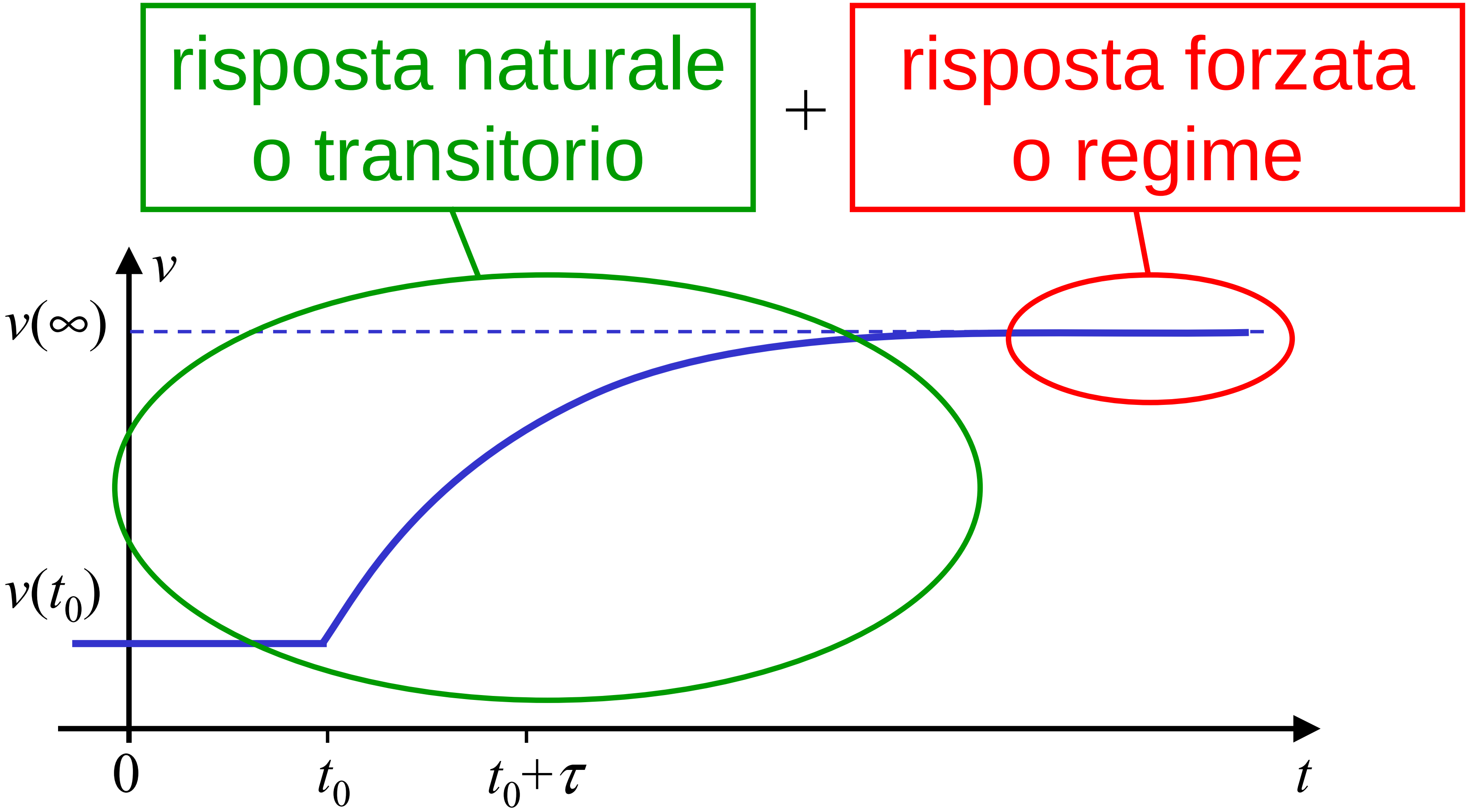
$$v(t) = \begin{cases} V_0 & t < 0 \\ V_S + (V_0 - V_S)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

$$\tau = RC$$

costante di tempo



Circuito *RC*: risposta completa



$$v(t) = v(\infty) + [v(t_0) - v(\infty)]\,e^{-(t-t_0)/\tau} \qquad t > t_0$$

Circuito RC: riassunto

Il calcolo della risposta completa di un circuito RC richiede:

- la conoscenza o il calcolo della tensione sul condensatore all'istante iniziale ($v(t_0)$)
- il calcolo della tensione a regime sul condensatore ($v(\infty)$)
- il calcolo della resistenza equivalente R posta in parallelo al condensatore per la determinazione della costante di tempo $\tau = RC$

Risposta completa di circuiti del I ordine

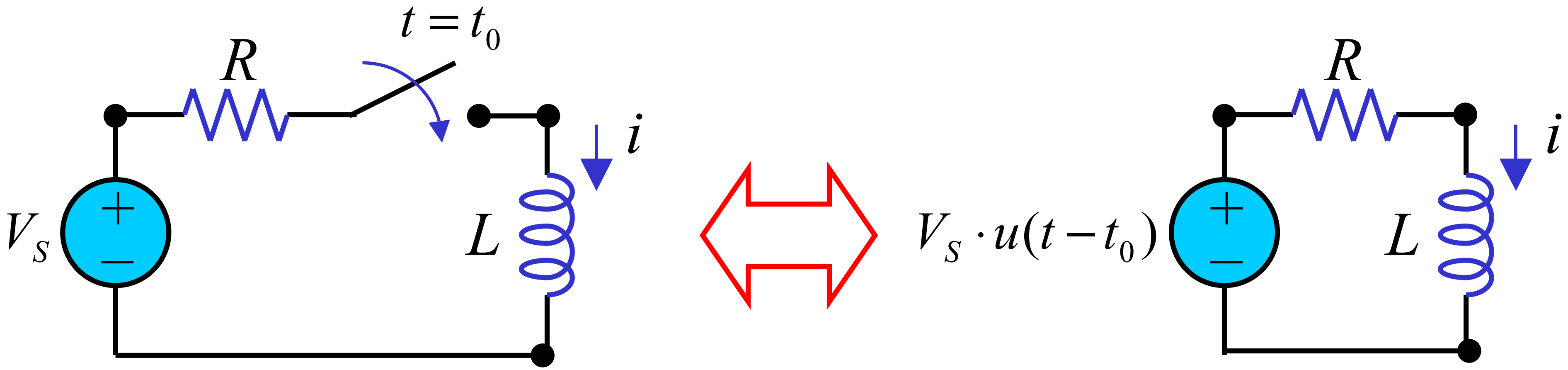
La risposta completa di un circuito del primo ordine è sempre del tipo:

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0^-) & t < t_0 \\ x(\infty) + [x(t_0^+) - x(\infty)]\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau} & t > t_0 \end{cases}$$

dove x rappresenta indifferentemente la tensione o la corrente sul condensatore o sull'induttanza e t_0 è l'istante in cui commuta l'interruttore. Si richiede il calcolo di:

- valori iniziali $x(t_0^-)$ e $x(t_0^+)$;
- valore a regime $x(\infty)$;
- costante di tempo $\tau = RC$ oppure $\tau = L/R$

Risposta al gradino di un circuito RL

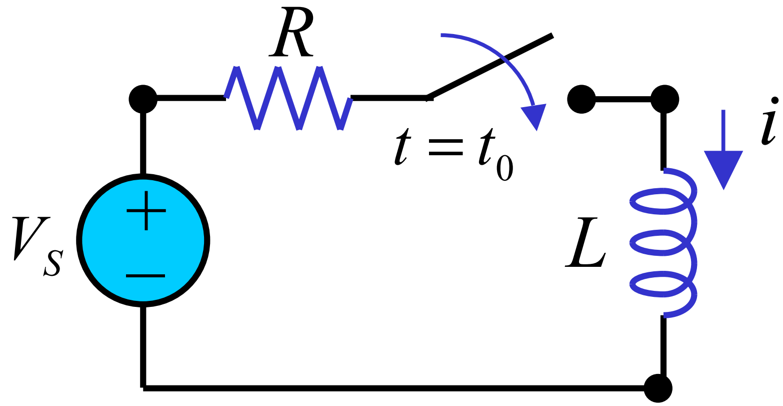


Ipotesi:

$$i(t_0^-) = I_0$$

$$\boxed{i(t) = ?}$$

Risposta al gradino di un circuito RL



- valori iniziali: $$i(t_0^+) = i(t_0^-) = I_0$$
- valore a regime: $$i(\infty) = \frac{V_S}{R}$$
- costante di tempo: $$\tau = \frac{L}{R}$$

Circuito *RL*: risposta completa

$$i(t) = \begin{cases} I_0 & t < t_0 \\ \dfrac{V_S}{R} + \left(I_0 - \dfrac{V_S}{R} \right) \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau} & t > t_0 \end{cases}$$

$$\tau = L / R$$

costante di tempo