

XI - LA SIMILITUDINE IDRAULICA

XI-1) Mah

Le relazioni della similitudine fluidodinamica consentono di mettere in relazione le caratteristiche di funzionamento di macchine geometricamente simili senza che si debbano compiere su ciascuna di esse prove sperimentali lunghe, costose e molto spesso, si pensi ad esempio alle grandi turbine idrauliche, impossibili da condurre in laboratorio.

E' quindi evidente il vantaggio per il costruttore di macchine che, rispettando opportuni parametri, potrà limitarsi a condurre le prove su di un modello in scala, deducendo poi per via analitica le prestazioni di tutte le macchine appartenenti alla stessa famiglia del modello. E' altresì evidente l'utilità di tali relazioni per il progettista d'impianti in quanto, sulla base di tali relazioni, potrà scegliere la macchina più adatta alle esigenze del proprio impianto facendo riferimento alle prestazioni di macchine esistenti, seppur di dimensioni diverse da quelle che gli necessitano.

Le relazioni della similitudine fluidodinamica, di cui mostreremo le proprietà in questo capitolo, si realizzano fra macchine che presentano:

- *Similitudine geometrica*: tutte le dimensioni omologhe, o corrispondenti, stanno in *rapporto di scala* costante. Indicando, ad esempio, con () e (') le grandezze riferite a due macchine simili, dovrà essere:

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'} = \frac{S}{S'} = \alpha \quad (\text{XI-1})$$

dove l e r sono due generiche dimensioni lineari, S una qualunque area locale (ad esempio diametro ed altezza di pala allo scarico della girante) e α il rapporto caratteristico della similitudine geometrica.

- *Similitudine cinematica*: i triangoli di velocità in sezioni omologhe sono simili. Sarà perciò:

$$\frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} = \frac{u}{u'} = \beta \quad (\text{XI-2})$$

dove β è il rapporto caratteristico della similitudine cinematica.

- *Uguale regime di moto, o flussi simili, in sezioni omologhe*: vale a dire che in sezioni corrispondenti deve essere uguale il numero di Reynolds Re .

- *Similitudine termodinamica*: di particolare importanza nelle macchine operanti con fluidi comprimibili; per flussi isoentropici, in sezioni corrispondenti deve essere uguale il Numero di

Mach periferico $Mu = \frac{u}{c}$, dove u è la velocità periferica in una sezione generica e c è la velocità

del suono alle condizioni esistenti nella stessa sezione. Per M_u ridotti (ad esempio inferiori a 0.5) l'effetto legato alla comprimibilità del fluido può essere trascurato. Si parlerà, in tal caso di similitudine idraulica ed a tali condizioni faremo riferimento nella trattazione seguente.

Dalle due prime condizioni di similitudine, tenendo presente che superfici geometricamente simili garantiscono la conservazione degli angoli di flusso (in particolare quelli d'ingresso e di scarico dalla girante, per una macchina operatrice si può immediatamente dedurre:

$$\frac{l_e}{l'_e} = \frac{u_2 v_2 \cos \alpha_2}{u'_2 v'_2 \cos \alpha'_2} = \beta^2 \quad (\text{XI-3})$$

dove si è supposto per semplicità un ingresso assiale. In altri termini, per macchine geometricamente simili e funzionanti in condizioni di similitudine, è costante ed uguale al quadrato del rapporto caratteristico β , il rapporto fra i lavori euleriani. Analogo risultato è evidentemente ottenibile per le macchine motrici.

Tenendo presente, inoltre, che in condizioni di similitudine è:

$$\frac{u}{u'} = \beta = \frac{\omega R}{\omega' R'} = \frac{n}{n'} \alpha \quad (\text{XI-4})$$

si ricava:

$$\frac{l_e}{l'_e} = \alpha^2 \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \quad (\text{XI-5})$$

Per macchine simili operanti in condizioni simili, il rapporto fra i lavori euleriani è, quindi, proporzionale al quadrato del rapporto fra le dimensioni ed al quadrato del rapporto fra le velocità di rotazione.

Sempre dalle prime due condizioni si può ricavare il rapporto tra le portate volumetriche elaborate da macchine simili operanti in condizione di similitudine. Per l'equazione di continuità sarà, infatti:

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}'} = \frac{vS}{v'S'} = \alpha^2 \beta$$

dove con v ed S si sono indicate una generica sezione di passaggio e la componente normale alla sezione della velocità del fluido. Tenendo presente, inoltre, la XI-4 si ottiene ancora:

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}'} = \alpha^3 \frac{n}{n'} \quad (\text{XI-6})$$

Le portate elaborate da macchine simili operanti in condizioni di similitudine dipendono linearmente dalla velocità di rotazione e dal cubo del rapporto fra le dimensioni.

Il terzo criterio, detto *principio di similitudine dinamica* o *principio di similitudine di Reynolds*, stabilisce che, in punti o sezioni corrispondenti, sia lo stesso il rapporto fra le forze d'inerzia e le forze d'attrito e agenti su un fluido in moto in condotti e che, eventualmente, lambisca un corpo immerso nella corrente fluida; non sono prese in considerazione le forze elastiche e quelle gravitazionali. Dalla condizione $\frac{F_i}{F'_i} = \frac{F_a}{F'_a}$ e dalla definizione di $Re = \frac{F_i}{F_a}$ si ricava immediatamente:

$$\frac{Re}{Re'} = \frac{F_i}{F_a} \frac{F'_a}{F'_i} = 1$$

Dall'espressione della forza d'inerzia, può essere dedotto con semplici passaggi il coefficiente caratteristico della similitudine dinamica, infatti:

$$\frac{F_i}{F'_i} = \frac{ma}{m'a'} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} \frac{\Delta t'}{m'\Delta v'} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}'} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\dot{V}}{\dot{V}'} \frac{\Delta v}{\Delta v'}$$

e per la XI-6:

$$\frac{F_i}{F'_i} = \frac{\rho}{\rho'} \alpha^2 \beta^2$$

Indicando con F la risultante delle forze attive e reattive agenti su una massa fluida in movimento, somma a sua volta delle forze d'inerzia e delle forze d'attrito, in condizioni di similitudine dinamica si deduce:

$$\frac{F}{F'} = \frac{F_i + F_a}{F'_i + F'_a} = \frac{\rho}{\rho'} \alpha^2 \beta^2$$

Relativamente ad un fluido in moto, tale risultante sarà anche uguale ad una differenza di pressione totale moltiplicata per la superficie S cui è applicata, e quindi:

$$\frac{\Delta p_t}{\Delta p'_t} = \frac{F}{S} \frac{S'}{F'} = \frac{\rho}{\rho'} \beta^2$$

Dalla definizione di prevalenza di una pompa, si ottiene infine:

$$\frac{h_m}{h'_m} = \frac{\Delta p_t}{g\rho} \frac{g\rho'}{\Delta p'_t} = \beta^2 = \alpha^2 \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \quad (\text{XI-7})$$

In condizioni di similitudine dinamica e analogamente a quanto visto per i lavori euleriani, il rapporto fra le prevalenze fornite al fluido da pompe simili è uguale al rapporto fra le dimensioni al quadrato per il quadrato del rapporto fra le velocità di rotazione.

La relazione XI-7 può essere dedotta per altra via osservando che, per la IV-3, la prevalenza di una

pompa è data da $h_m = h_e - y_i$ e che, in condizioni di progetto, le perdite interne sono costituite per la maggior parte dalle perdite distribuite $y_{id} = \sum_j f_{jd} \frac{v_j^2 L_j}{2g D_{hj}}$. Allo stesso numero di Reynolds, in condizioni di similitudine geometrica e per la stessa scabrezza relativa, i diversi coefficienti di perdita f_d e f'_d relativi a due macchine simili saranno uguali ed il rapporto fra le perdite idrauliche interne sarà dato da:

$$\frac{y_i}{y'_i} = \beta^2$$

Tenendo presente la XI-3, il rapporto fra le prevalenze sarà quindi:

$$\frac{h_m}{h'_m} = \frac{h_e - y_i}{h'_e - y'_i} = \beta^2$$

Dalla definizione di rendimento idraulico si ricava, infine, la fondamentale relazione della similitudine idraulica:

$$\frac{\eta_i}{\eta'_i} = \frac{h_m}{h_e} \frac{h'_e}{h'_m} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad (\text{XI-8})$$

Macchine geometricamente simili ed operanti in condizioni di similitudine idraulica, hanno lo stesso rendimento idraulico. La relazione (XI-8), che è stata ricavata per macchine operatrici, è evidentemente valida anche per le macchine motrici. Osserviamo, inoltre, che per la validità della (XI-8) non è necessario che il fluido elaborato sia lo stesso poiché prevalenza e lavoro eluriano sono indipendenti dalla densità del fluido. A pari condizioni operative, in particolare alla stessa prevalenza, dipenderà, invece, dalla densità del fluido la pressione alla mandata della pompa. Dalle relazioni precedenti e osservando che, in condizioni di similitudine, sarà $\eta_v = \eta'_v$ e $\eta_m = \eta'_m$, si ricava immediatamente:

$$\frac{P_a}{P'_a} = \frac{\gamma \dot{V} h_m}{\gamma' \dot{V}' h'_m} = \frac{\rho}{\rho'} \alpha^5 \left(\frac{n}{n'} \right)^3 \quad (\text{XI-9})$$

dalla quale si deduce che il rapporto fra le potenze all'asse assorbite da pompe simili è uguale al rapporto fra le densità dei fluidi elaborati per la quinta potenza del rapporto geometrico e per il cubo del rapporto fra le velocità di rotazione.

Dalla (XI-6) e dalla (XI-7) si possono, inoltre dedurre le relazioni che permettono la costruzione delle caratteristiche interne di una pompa a diverse velocità di rotazione; per $\alpha = 1$ si ottiene infatti:

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}'} = \frac{n}{n'} \quad \text{e} \quad \frac{h_m}{h'_m} = \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \quad (\text{XI-10})$$

Eliminando, inoltre, la velocità di rotazione nelle due relazioni si ottiene:

$$\frac{h_m}{h'_m} = \left(\frac{\dot{V}}{\dot{V}'} \right)^2 \quad (\text{XI-11})$$

che esprime il luogo geometrico dei punti di funzionamento ad uguale rendimento idraulico per una pompa che operi in similitudine a diverse velocità di rotazione: tale luogo è, quindi, rappresentato da una parabola con vertice nell'origine. In fig. XI-1 sono illustrate, per tre diverse velocità di rotazione, le considerazioni sopra esposte.

Nella pratica e per ragioni che saranno chiarite in seguito, le curve d'isorendimento coincideranno con quelle paraboliche solamente in zone non molto discoste da quelle di progetto della macchina, mentre, per condizioni operative abbastanza diverse da quelle di progetto, si avranno diagrammi collinari analoghi a quelli riportati in fig. XI-2.

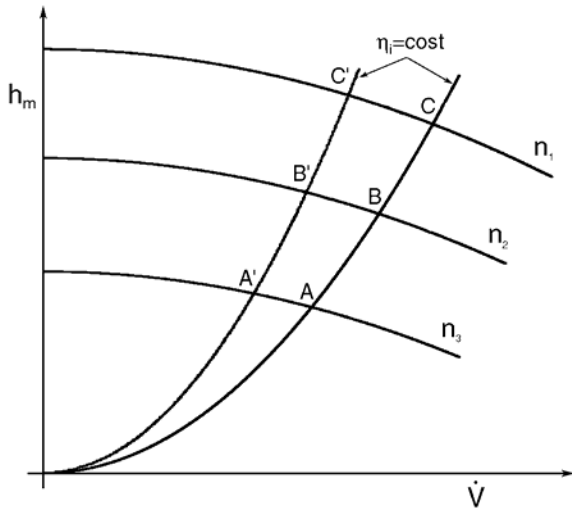


Fig. XI-1

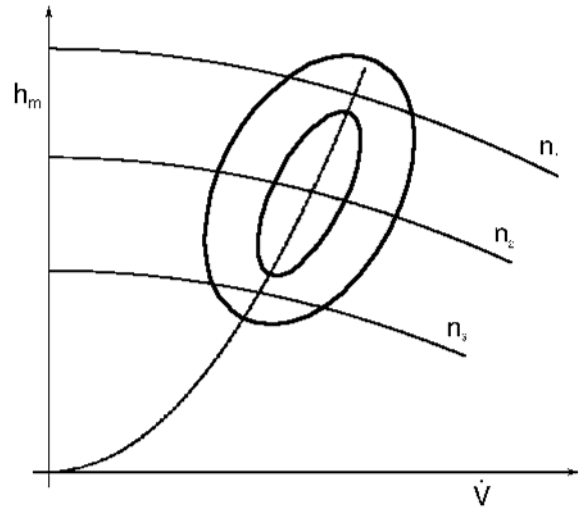


Fig. XI-2

XI-2) Coefficienti dimensionali.

Le grandezze operative delle macchine dipendono, di norma, da numerosi parametri che rendono gravosa la loro rappresentazione; per una pompa, ad esempio, la relazione tra portata e prevalenza sarà esprimibile mediante relazioni del tipo:

$$h_m = f(\dot{V}, n, D, \rho, \mu)$$

dove D è una dimensione di riferimento, solitamente il diametro della girante, che identifica la taglia della macchina all'interno di macchine simili, n è la velocità di rotazione, ρ e μ rispettivamente la densità e la viscosità del fluido e $f()$ un generica funzione d'origine sperimentale.

L'analisi dimensionale, permette, però, di ridurre il numero delle variabili effettivamente indipendenti utilizzando opportune variabili adimensionali al posto di quelle dimensionali. Secondo il teorema di Vaschy-Buckingham, infatti, un'equazione fra n parametri differenti può essere espressa da una relazione tra $n - m$ variabili adimensionali indipendenti, essendo m il numero di grandezze fondamentali del sistema (ad esempio, massa, lunghezza e tempo per un sistema meccanico). La relazione soprascritta potrà quindi ridursi alla funzione a due variabili:

$$\frac{h_m}{n^2 D^2} = f\left(\frac{\dot{V}}{n D^2}, \frac{\rho n D^2}{\mu}\right)$$

o, il che è equivalente, a:

$$\psi = f(\varphi, Re) \quad (XI-11)$$

dove si sono introdotti i coefficienti adimensionali:

- Coefficiente di portata $\varphi = \frac{\dot{V}}{\omega D_2^3}$
- Coefficiente di prevalenza $\psi = \frac{g h_m}{\omega^2 D_2^2}$
- Numero di Reynolds $Re = \frac{\rho v D_h}{\mu}$

In condizioni di similitudine dinamica $\left(\frac{Re}{Re'} = 1\right)$, la (XI-11) si riduce alla funzione ad una sola variabile $\psi = f(\varphi)$ che esprime, in forma adimensionale la caratteristica interna di tutte le pompe simili operanti in condizioni di similitudine.

Accanto a quelli citati richiamiamo altri coefficienti adimensionali comunemente utilizzati

nell'analisi e nella progettazione delle macchine idrauliche a flusso continuo:

- Coefficiente di potenza $\tau = \frac{P_a}{\rho \omega^3 D_2^5}$
- Coefficienti di velocità periferica $k_u = \frac{u}{\sqrt{2\Delta h}} \left(k_u = \frac{u}{\sqrt{2gh_m}} \text{ per le macchine idrauliche} \right)$
- Grado di reazione $r = \frac{\Delta h_r}{\Delta h} \left(r = \frac{\Delta p_r}{\Delta p} \text{ per le macchine idrauliche} \right)$

Tali coefficienti potranno essere correlati fra di loro mediante relazioni del tipo (XI-11) che saranno suggerite dall'esperienza e dall'indagine sperimentale.

XI-3) Numeri caratteristici.

Per caratterizzare le famiglie di macchine simili sono utilizzati nella pratica alcuni indici, legati alle condizioni operative di progetto e costanti per macchine simili, di cui, senza occuparci di come possano essere teoricamente dedotti, elenchiamo le espressioni più comunemente usate:

1. Numero di giri caratteristico: $n_c = n \frac{\sqrt{P_a}}{h_m^{5/4}}$ (XI-12)

Dove n è la velocità di rotazione espressa in giri/1', P_a è la potenza all'asse espressa in CV e h_m è il salto motore espresso in m. E' utilizzato soprattutto per le turbine idrauliche e rappresenta la velocità di rotazione di massimo rendimento di una turbina che, sotto un salto motore di un metro, eroga all'asse una potenza di 1 CV. Il numero di giri caratteristico, come i numeri caratteristici che saranno descritti in seguito, è un invariante della similitudine idraulica e, quindi, è rappresentativo di macchine appartenenti alla stessa famiglia seppur di dimensioni diverse. A prescindere dalle unità di misura adottate, esso non è un numero adimensionale giacché nella stessa relazione compaiono grandezze estensive (la potenza) ed intensive (il salto motore).

Sviluppando le grandezze contenute nella (XI-12) si ottiene:

$$n_c = n \sqrt{\frac{\gamma}{75}} \sqrt{\eta_g} \frac{\sqrt{h_m \dot{V}}}{h_m^{5/4}} = n \sqrt{\frac{\gamma}{75}} \sqrt{\eta_g} \frac{\sqrt{\dot{V}}}{h_m^{3/4}}$$

dove 75 è il coefficiente di passaggio da kg m/s a CV. Per l'acqua ($\gamma=1000 \text{ kg/m}^3$) si deduce immediatamente:

$$n_c = n \sqrt{\frac{1000}{75}} \sqrt{\eta_g} \frac{\sqrt{\dot{V}}}{h_m^{3/4}} \cong 3,65 n \sqrt{\eta_g} \frac{\sqrt{\dot{V}}}{h_m^{3/4}} \quad \text{(XI-13)}$$

per le pompe operanti con acqua sarà ovviamente:

$$n_c \cong \frac{3,65}{\sqrt{\eta_g}} n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{h_m^{3/4}} \quad \text{(XI-13')}$$

Osserviamo che taluni autori fanno riferimento alla potenza idraulica $P_i = \gamma \dot{V} h_m$ ed omettono, quindi, il rendimento globale η_g nelle (XI-13) e (XI-13').

2. Velocità specifica (o numero di giri specifico): $n_s = n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{h_m^{3/4}}$ (XI-14)

Dove n è la velocità di rotazione espressa in giri/1', \dot{V} è portata volumetrica espressa in m^3/s e h_m è la prevalenza espressa in m. E' utilizzato soprattutto per le pompe e, come si può osservare dalla (XI-14), è indipendente dalla natura del fluido pompato. Dalle definizioni sopra riportate, per l'acqua, si ricava immediatamente:

$$n_c = \frac{3,65}{\sqrt{\eta_g}} n_s$$

3. Velocità specifica adimensionale (o numero di giri specifico adimensionale):

$$\omega_s = \omega \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(gh_m)^{3/4}} = \frac{\pi}{30} n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(gh_m)^{3/4}} \quad (\text{XI-15})$$

dove ω è la velocità di rotazione espressa in rad/s. Taluni autori assumono per il numero di giri specifico adimensionale l'espressione:

$$n_s = n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(gh_m)^{3/4}}$$

4. Numero di giri caratteristico (utilizzato per i compressori):

$$\sigma_n = \omega \frac{\sqrt{\dot{V}/\pi}}{(2\Delta h_{is})^{3/4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{30} n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(2\Delta h_{is})^{3/4}} \quad (\text{XI-16})$$

dove Δh_{is} è il salto entalpico isoentropico a cavallo del compressore espresso in J/kg.

Il numero di giri caratteristico, od uno qualsiasi dei numeri caratteristici presentati, è immediatamente correlabile alla geometria di una macchina a flusso continuo, motrice od operatrice, ottenendo, in tal modo, delle relazioni che legano, alle condizioni di progetto della macchina, la geometria della stessa alle condizioni operative. Riferendoci, a titolo d'esempio, ad una pompa centrifuga (fig. IX-19), si può osservare che:

$$\dot{V}_e = \frac{\dot{V}}{\eta_v} = \pi D_2 b_2 \xi_2 v_2 \sin \alpha_2$$

dove \dot{V}_e è la portata elaborata dalla girante. D'altra parte, in condizioni di progetto (ingresso assiale) si ha:

$$h_m = \eta_i h_e = \frac{\eta_i}{g} u_2 v_2 \cos \alpha_2$$

e tenendo presente che:

dalla (XI-14) si ricava:

$$n_s = \frac{60}{\pi} \frac{u_2}{D_2} \left(\frac{g}{\eta_i} \right)^{3/4} \frac{\sqrt{\eta_v \pi D_2 b_2 \xi_2 v_2 \sin \alpha_2}}{(u_2 v_2 \cos \alpha_2)^{3/4}}$$

da cui:

$$n_s = \frac{60}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{g}{\eta_i} \right)^{3/4} \sqrt{\eta_v \xi_2} \sqrt{\frac{b_2}{D_2}} \sqrt{\text{tg} \alpha_2} \left(\frac{u_2}{v_2 \cos \alpha_2} \right)^{1/4} \quad (\text{XI-17})$$

Per il teorema dei seni applicato al triangolo delle velocità allo scarico della girante, si può scrivere:

$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}{\sin \beta_2} = \frac{\sin \alpha_2 \cos \beta_2 + \sin \beta_2 \cos \alpha_2}{\sin \beta_2}$$

e sostituendo nella (XI-17):

$$n_s = \frac{60}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{g}{\eta_i} \right)^{3/4} \sqrt{\eta_v \xi_2} \sqrt{\frac{b_2}{D_2}} \sqrt{\text{tg} \alpha_2} \left(1 + \frac{\text{tg} \alpha_2}{\text{tg} \beta_2} \right)^{1/4} \quad (\text{XI-18})$$

che esprime la relazione cercata tra numero caratteristico e geometria della macchina. Tenendo presente la (XI-14) che lega il numero di giri specifico alle condizioni operative, si può dedurre che al crescere della portata erogata o al diminuire della prevalenza deve crescere n_s : per ottenere ciò saranno necessarie giranti con pale sempre più larghe e diametro esterno sempre più piccolo (giranti più compatte). L'angolo α_2 deve crescere mentre l'angolo β_2 deve diminuire, con pale

sempre più rivolte all'indietro rispetto al moto all'aumentare del numero di giri specifico. Osserviamo ancora che, per evitare distacchi della vena fluida dalla superficie lambita, con conseguente caduta di rendimento, ed eccessive sollecitazioni sulle pale, all'aumentare dell'altezza di pala b_2 , conseguente all'aumento di n_s , sarà necessario passare da giranti con palettatura radiale a giranti con palettatura conica (giranti a flusso misto), sino alle giranti assiali per i valori di n_s più elevati. Altre relazioni analoghe alla (XI-18), che qui omettiamo per brevità di trattazione, sono ricavabili tra i numeri caratteristici e le grandezze adimensionali definite nel presente capitolo (coefficienti di velocità, grado di reazione, coefficiente di portata, ecc...). In fig. XI-3 sono evidenziati sinteticamente i concetti sopraesposti.

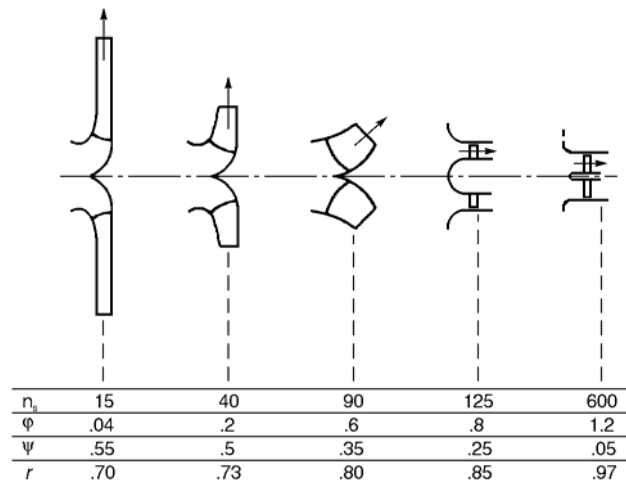


Fig. XI-3

A conclusione di queste brevi note, facciamo osservare che tutte le considerazioni svolte e tutte le grandezze riportate nelle espressioni precedenti s'intendono riferite a macchine monostadio o a singoli stadi di macchine pluristadio.

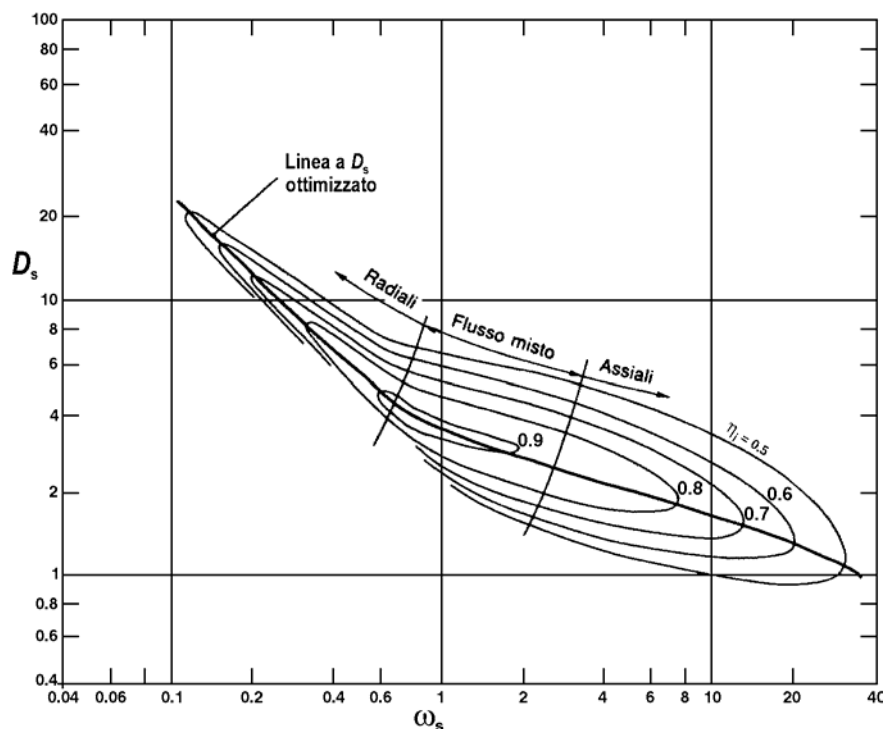


Fig. XI-4

In fig. XI-4 è rappresentato il diagramma di Baljé in cui sono riportate le condizioni di

funzionamento delle pompe a flusso continuo per diversi rendimenti e diametri specifici

$D_s = D \frac{(gh_m)^{1/4}}{\sqrt{\dot{V}}}$; per condizioni di rendimento ottimali il diagramma coincide con quello di Cordier.

Se, per date prestazioni della macchina, le dimensioni corrispondenti al rendimento ottimale non sono accettabili o economicamente convenienti, si dovrà modificare il numero di giri o accettare un rendimento non ottimale. Diagrammi statistici analoghi a quello riportato in fig. XI-4, che guidano nel progetto di massima della macchina, sono disponibili per un gran numero di macchine: pompe, turbine idrauliche, compressori, ecc....

XI-4) Limiti di validità della similitudine idraulica.

Influenza della viscosità.

Le considerazioni relative alle prestazioni di macchine simili esposte nei paragrafi precedenti, sono state dedotte nell'ipotesi, fra le altre, di similitudine dinamica, vale a dire d'invariabilità del numero di Reynolds nelle diverse condizioni operative di macchine appartenenti alla stessa famiglia. Spesso, nella pratica, tale condizione non è rispettata: si pensi, ad esempio, ad una pompa operante con lo stesso fluido, a regimi di rotazione diversi in condizioni di similitudine cinematica, oppure a macchine geometricamente simili, ma di diverse dimensioni, operanti con lo stesso fluido e alla stessa velocità di rotazione, o, per finire, ad una macchina operante alla stessa velocità di rotazione con fluidi di diversa viscosità. Al variare di Re , varierà il "peso" delle forze viscosive rispetto a quello delle forze d'inerzia, con conseguenti variazioni di rendimento. In generale, si potrà dire che l'influenza delle forze viscosive sarà trascurabile per regimi di moto turbolenti (peso preponderante delle forze d'inerzia) e, quindi, sarà trascurabile, per elevati numeri di Reynolds, l'effetto della variazione di Re sul rendimento della macchina. Passando da regimi turbolenti a regimi di transizione o laminari, com'è per fluidi molto viscosi o per macchine di piccole dimensioni, l'influenza della variazione di Re sul rendimento sarà sempre più accentuata.

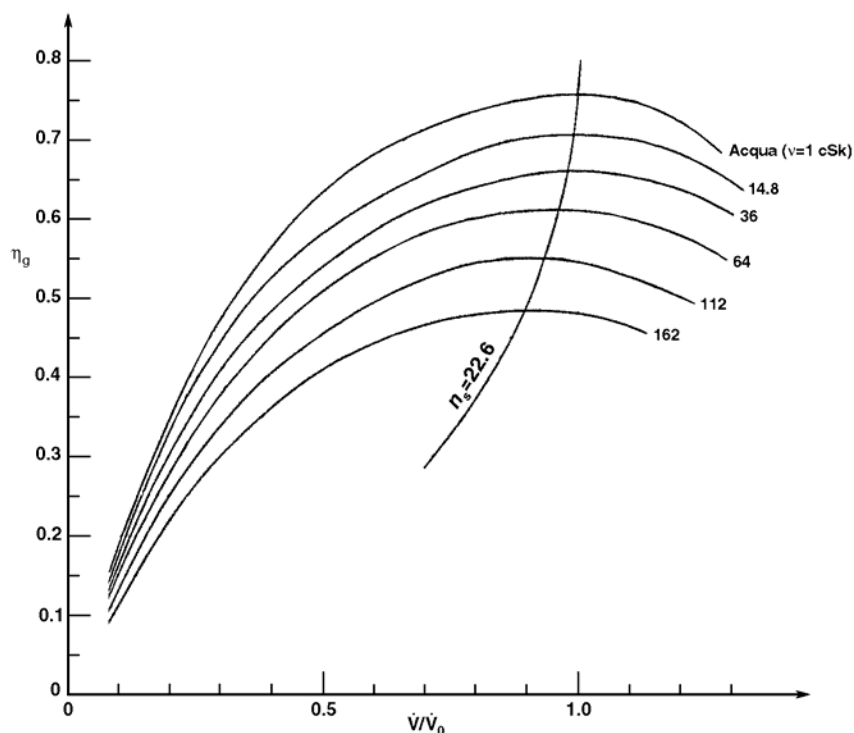


Fig. XI-5

In fig. XI-5 sono riportate le curve di rendimento di una pompa centrifuga operante alla stessa velocità di rotazione con oli di diversa viscosità cinematica e, quindi, con una corrispondente

variazione del numero di Reynolds da $Re = 31.4 \cdot 10^4$, per il funzionamento con acqua, a $Re = .17 \cdot 10^4$, per il funzionamento con l'olio di viscosità cinematica pari a $1.62 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$: nella figura, si è indicata con \dot{V}_0 la portata di massimo rendimento della pompa operante con acqua. La variazione del numero di Reynolds e/o della viscosità avrà evidentemente effetto anche sulle prestazioni delle macchine quali, ad esempio, potenza all'asse e prevalenza di una pompa. Di conseguenza le caratteristiche operative di macchine simili, espresse mediante coefficienti adimensionali, non saranno più curve ad una sola variabile, ma curve a due variabili.

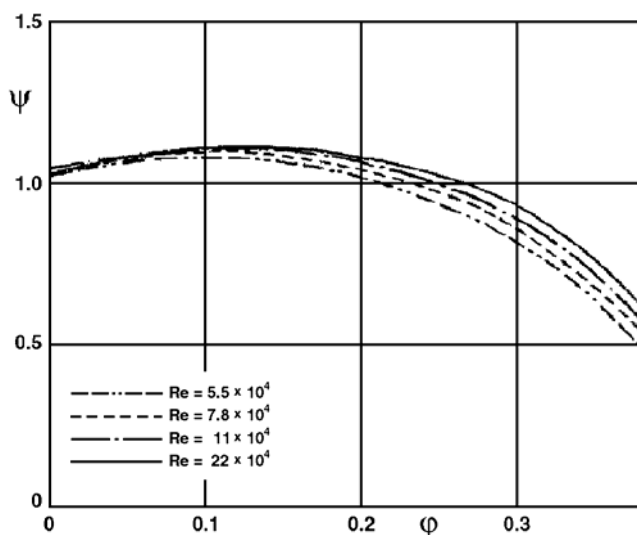


Fig. XI-6

In fig. XI-6 sono riportate le caratteristiche interne di una famiglia di pompe, espresse mediante i coefficienti di prevalenza ψ e di portata ϕ , al variare del numero di Reynolds: appare evidente dalla figura la dipendenza di ψ , oltre che dal coefficiente di portata, anche dal numero di Reynolds. Per quanto concerne il funzionamento in condizioni diverse da quelle di progetto, possiamo osservare che, in tali condizioni, tendono a prevalere, rispetto alle perdite distribuite, le perdite per distacco della vena fluida e quelle per urto. Tali perdite dipendono dal numero di Reynolds in modo trascurabile e, in ogni caso, diversamente da come ne dipendono le perdite distribuite. Anche per il funzionamento in condizioni fuori progetto, viene a cadere, quindi, la condizione di similitudine dinamica e non sarà perciò lecito attendersi il pieno rispetto delle leggi della similitudine idraulica.

Effetto scala.

Con effetti di scala s'intendono i limiti di validità delle leggi della similitudine idraulica dovuti alla non perfetta riproduzione in scala della geometria di macchine simili. Al variare delle dimensioni, è in genere mantenuto invariato, per motivi tecnologici e di costo, il grado di lavorazione superficiale e di conseguenza rimane invariata la scabrezza: al diminuire delle dimensioni delle macchine di una data famiglia, aumenterà, quindi, la scabrezza relativa con conseguente diminuzione del rendimento idraulico. Per gli stessi motivi di ordine tecnologico e di allineamento, non potranno essere mantenuti costanti in termini relativi i giochi tra parti mobili e parti fisse con conseguente peggioramento del rendimento volumetrico per le macchine di dimensioni minori.

Da quanto sopra esposto, si può concludere che, all'interno di una data famiglia, le macchine di dimensioni maggiori avranno miglior rendimento di quelle di dimensioni minori. Per ogni famiglia di macchine, esisterà una dimensione minima, sotto la quale non sarà opportuno scendere onde evitare rendimenti eccessivamente bassi. La dimensione massima sarà imposta, invece, dalle condizioni di resistenza meccanica delle parti della macchina.

Diversi criteri semiempirici sono stati proposti per tener conto dell'effetto scala sul rendimento di

una macchina. Uno dei più semplici è dato dalla formula di Moody:

$$\frac{1-\eta'}{1-\eta} = \left(\frac{D}{D'}\right)^\alpha$$

dove l'esponente α varia da 0.1 a 0.5 a seconda del tipo di macchina. L'esperienza ha tuttavia mostrato che, all'interno di una famiglia di macchine simili, il coefficiente α è molto variabile colle dimensioni. In alternativa alla formula di Moody, si può ricorrere a funzioni statistiche del tipo:

$$\eta = \eta_s f_r(D)$$

dove η_s il rendimento di una macchina di dimensione standard per la famiglia di macchine simili presa in considerazione e f_r un fattore correttivo abbastanza generale all'interno della famiglia. Il grafico riportato in fig. XI-7 si riferisce a famiglie di pompe per la quale si è assunto, come diametro standard, il diametro all'aspirazione D_1 di 60 pollici, diametro per cui gli effetti di scala possono essere considerati trascurabili.

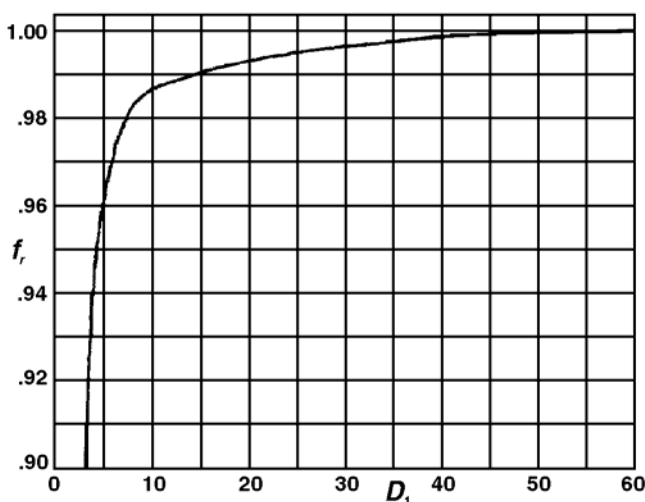


Fig. XI-7

Effetti della comprimibilità.

Le relazioni di similitudine sopra esposte, sono state ricavate trascurando gli effetti della comprimibilità del fluido e, quindi, con un rapporto costante, per un dato fluido, tra portata massica e portata volumetrica. Da ciò deriva, di conseguenza, che una variazione di portata in una data sezione implica una variazione proporzionale della velocità del fluido e viceversa. Nel caso di fluidi comprimibili, quali gas o vapori a velocità sufficientemente elevate ($Ma \geq 0.4$), affinché le portate volumetriche stiano in rapporto proporzionale alle portate massiche in una data sezione, è necessario che siano in proporzione anche le densità. Dalla III-19, relativa al flusso isoentropico di fluidi comprimibili in condotti a sezione variabile, possiamo, dedurre che il rapporto fra le densità in una data sezione resta invariato solo se il numero di Mach è lo stesso, così come il rapporto delle temperature e delle pressioni. Perché sia soddisfatta la similitudine nel campo dei fluidi comprimibili, oltre alle condizioni di similitudine geometrica e cinematica, è necessaria l'uguaglianza dei numeri di Mach o di grandezze ad essi proporzionali. Con riferimento ad una generica sezione della macchina, si usa definire il *numero di Mach periferico*:

$$M_u = \frac{u}{c}$$

dove c è la velocità del suono in una data sezione.

La fig. XI-8 mostra l'effetto del numero di Mach sulle curve caratteristiche adimensionali teoriche (ossia calcolate) di un compressore. Si può osservare che le curve coincidono fino a $Ma = 0.5$ per poi subire forti modifiche di forma, soprattutto ad elevate portate elaborate a causa dell'effetto di

choking.

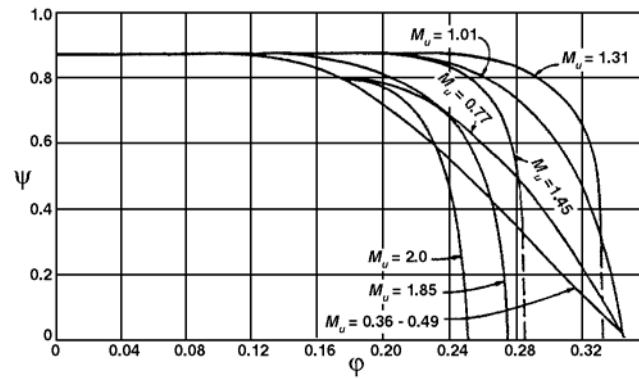


Fig. XI-8

Per tener conto degli effetti della comprimibilità, le variabili operative di un compressore sono abitualmente riferite a condizioni d'aspirazione standard (tipicamente, le condizioni dell'atmosfera standard p_r, T_r, R_r); si ottengono in tal modo le grandezze ridotte, quali ad esempio:

pressione ridotta	$\delta = \frac{p_1}{p_r}$
temperatura ridotta	$\vartheta = \frac{R_1 T_1}{R_r T_r}$
portata ridotta	$\dot{m}_r = \frac{\dot{m} \sqrt{\vartheta}}{\delta \left(\frac{D}{D_r} \right)^2}$
numero di giri ridotto	$n_r = \frac{n \left(\frac{D}{D_r} \right)}{\sqrt{\vartheta}}$

dove D_r è una dimensione standard per la famiglia di compressori simili.