Il nastro di Möbius

Riccardo Dossena

7 gennaio 2011

Il nastro (o striscia) di Möbius è una superficie scoperta nel 1858 dal matematico tedesco August Ferdinand Möbius. Nella figura 1 possiamo vederne un modello di carta.

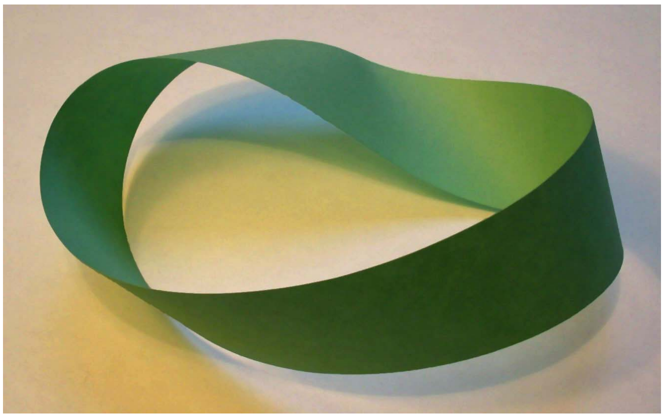


Figura 1: Nastro di Möbius di carta.

Figura 2: August Ferdinand Möbius (1790–1869).

Per realizzarlo è sufficiente seguire la procedura descritta nella figura 3.

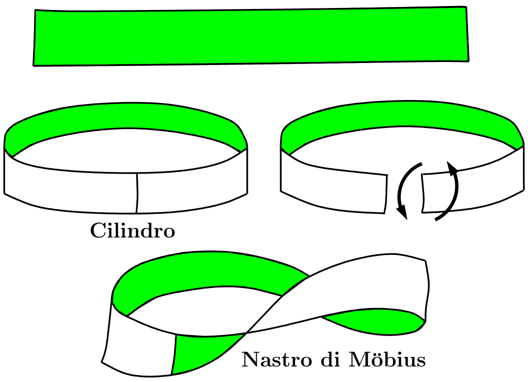


Figura 3: Gli estremi di una striscia di carta possono essere uniti in due modi: il più semplice è quello che porta ad avere un cilindro; eseguendo invece una torsione preliminare di 180°, come indicato dalle frecce, si ottiene un nastro di Möbius.

Come si può osservare, il nastro di Möbius ha un unico bordo chiuso: scorrendolo con un dito per intero, possiamo ritornare all'esatto punto di partenza. C'è un'altra particolarità interessante: questa superficie ha una sola faccia, vale a dire non è possibile dipingerla con due colori diversi (v. figura 3). Infatti, immaginando di camminare sul nastro seguendo la "linea di mezzeria", dopo un giro completo ci ritroveremmo dalla parte opposta, come mostrano molto bene le formiche di Escher (1898–1972) nella figura 4 (provate a seguirle...). In questo senso si dice che la striscia di Möbius è una superficie *non orientabile*.

Figura 4: M.C. Escher, *Möbius Strip II*, xilografia, 1963.

Il nastro di Möbius può essere parametrizzato mediante le seguenti equazioni:

$$
(1) \qquad \begin{cases} x = \left(r + v \sin \dfrac{u}{2}\right) \cos u \\[2ex] y = \left(r + v \sin \dfrac{u}{2}\right) \sin u \qquad\qquad v \in [-l, l],\ u \in [0, 2\pi) \\[2ex] z = v \cos \dfrac{u}{2} \end{cases}
$$

dove r e l sono numeri positivi fissati con $r > l$. L'obiettivo di questo breve articolo è quello di analizzare *didatticamente* queste formule per capire in che modo possano generare tale superficie. Ponendo ad esempio $r = 4$ e $l = 1$, si ottiene il nastro della figura 5. La sua "linea di mezzeria" risulta essere un cerchio che prende il nome di *cerchio centrale* (v. pag. 4), il cui raggio è proprio r. La larghezza della striscia misura invece $2l$. Questo particolare nastro costituirà il nostro riferimento grafico, ma tutte le considerazioni che faremo potranno essere facilmente generalizzate.

Per capire come opera effettivamente la parametrizzazione (1), è utile "fissare" uno dei due parametri assegnandogli un valore e "muovere l'altro", osservando quali curve vengono così generate. Possiamo dire informalmente che il parametro u "gira intorno" al nastro in senso antiorario, mentre il parametro v "si muove da un lato all'altro" della striscia. Fissati i valori di u e v, viene determinato un punto $P(x, y, z)$ della superficie; $|v|$ rappresenta la distanza di P dal cerchio centrale (come risulterà chiaro nel seguito).

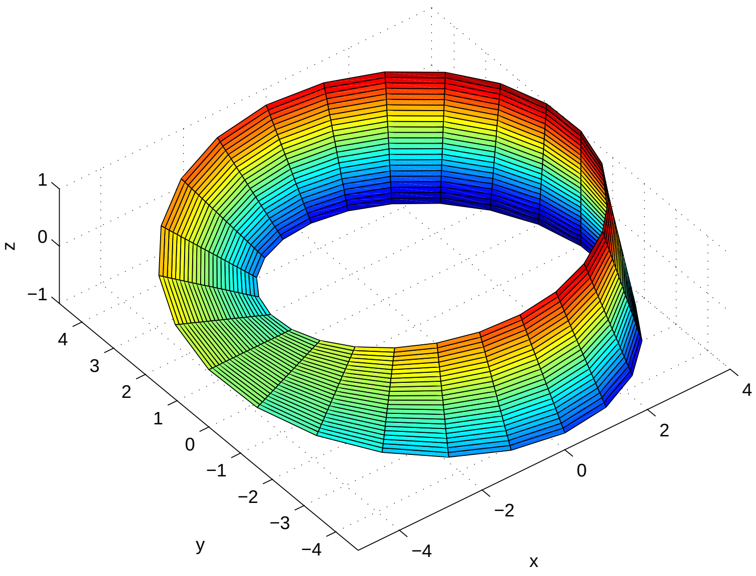


Figura 5: Nastro ottenuto col comando MATLAB
`ezsurf('(4+v.*sin((1/2).*u)).*cos(u)', '(4+v.*sin((1/2).*u)).*sin(u)', 'v.*cos((1/2).*u)', [0,2*pi,-1,1], 25); axis equal`

Attribuendo al parametro v i valori 1 e -1, si ottengono due curve nello spazio le cui equazioni parametriche sono rispettivamente

$$\begin{cases} x = \left(r + \sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u \\ y = \left(r + \sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u \qquad u \in [0, 2\pi) \\ z = \cos\dfrac{u}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \left(r - \sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u \\ y = \left(r - \sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u \qquad u \in [0, 2\pi) \\ z = -\cos\dfrac{u}{2} \end{cases}$$

e le cui rappresentazioni grafiche sono mostrate nelle figure 6 e 7.

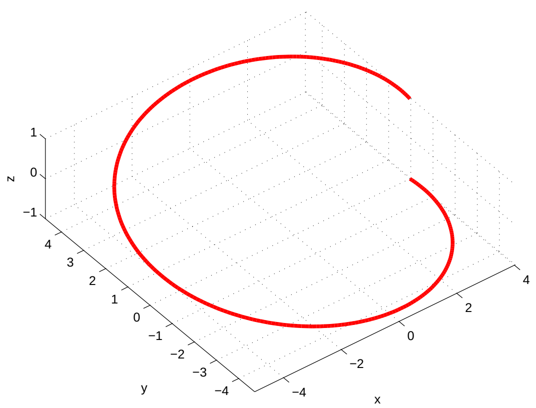


Figura 6: Curva ottenuta con $v = 1$.

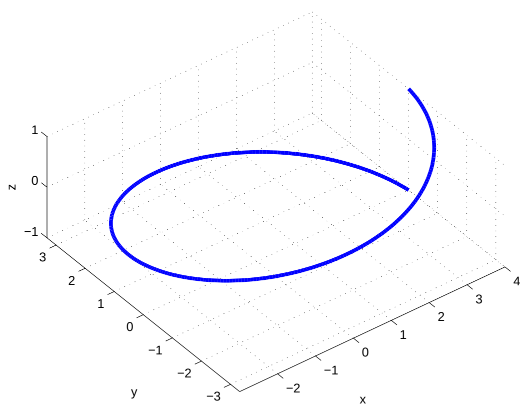


Figura 7: Curva ottenuta con $v = -1$.

L'unione di queste due curve genera l'unico bordo del nastro di Möbius (figura 8).

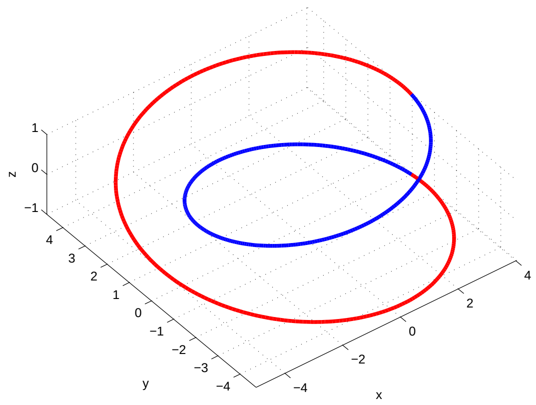


Figura 8: I due grafici precedenti sovrapposti formano il bordo del nastro.

Il cerchio centrale si ottiene ponendo $v = 0$. La parametrizzazione diviene

$$\begin{cases} x = r\cos u \\ \\ y = r\sin u \qquad\qquad u \in [0, 2\pi) \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

e la sua rappresentazione grafica viene mostrata in figura 9, insieme a una parte di bordo.

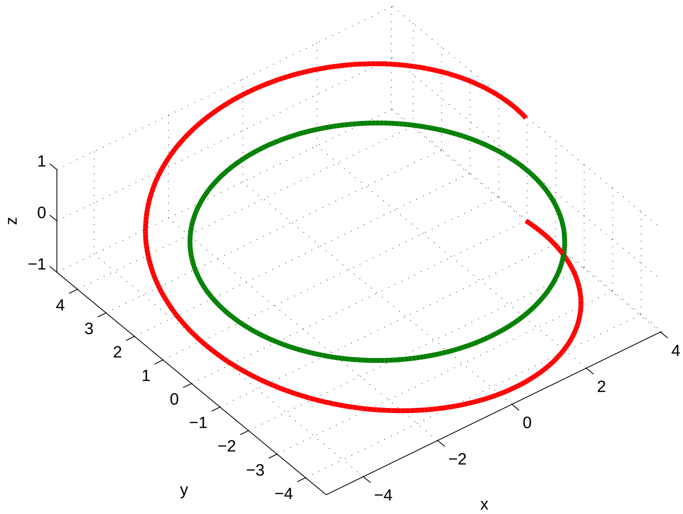


Figura 9: Il cerchio centrale (in verde).

Possiamo ora estendere questo processo assegnando al parametro v alcuni valori compresi fra -1 e 1. Vediamo così, in corrispondenza di ciascuno di essi, che vengono generate delle curve "intermedie" (figura 10).

Abbiamo detto che il parametro u permette di descrivere il nastro "girandoci attorno" in senso antiorario, compiendo cioè una rotazione completa di 2π. Come mostra la figura, muovendo il parametro u in corrispondenza di un valore $a > 0$ assegnato a v, si ottiene una linea aperta che si richiude con la corrispondente ottenuta assegnando il valore $-a$. Tutte queste linee non si intersecano, e immaginando di attribuire a v tutti i valori compresi tra -1 e 1, si vede come la nostra superficie possa essere "riempita".

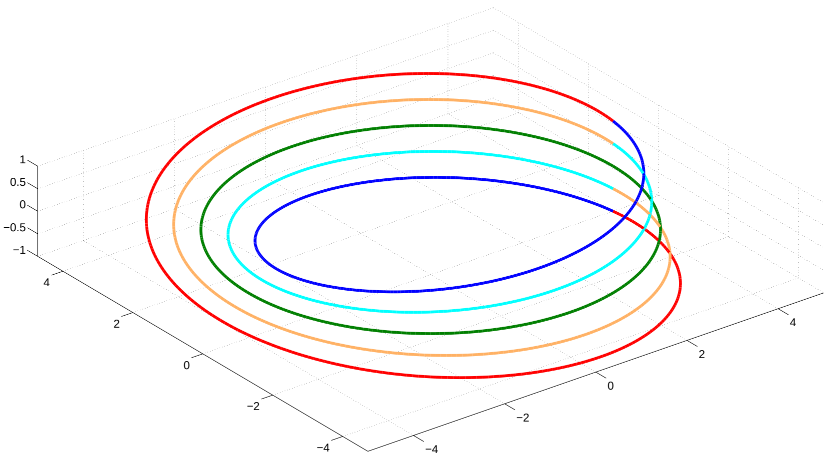


Figura 10: Linee ottenute fissando alcuni valori del parametro v: $v = 0$ (verde); $v = 1$ (rosso); $v = -1$ (blu); $v = 1/2$ (arancione); $v = -1/2$ (azzurro).

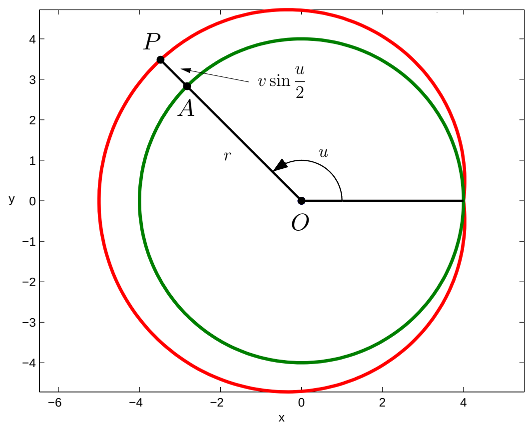


Figura 11: Vista dall'alto.

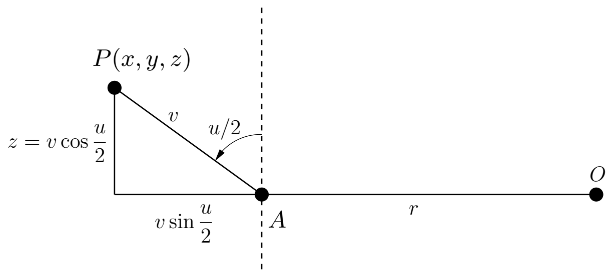


Figura 12: Vista di lato.

La figura 11 mostra una linea del bordo ($v = 1$) e il cerchio centrale ($v = 0$) visti dall'alto. Trascuriamo la coordinata z e osserviamo come la curva rossa, al variare di $u \in [0, 2\pi)$, si allarghi rispetto al cerchio centrale finché $u = \pi$, per poi restringersi nella seconda parte del giro. Ma allo stesso tempo, il parametro u permette al nastro di "attorcigliarsi" attorno al cerchio centrale, compiendo una rotazione di π, descritta infatti dallo stesso parametro ma nella forma $u/2$ (ad esempio quando $u = \pi$ la superficie del nastro ha avuto una torsione di $\pi/2$ ed è parallela al piano orizzontale xy). Ciò può essere messo in evidenza bloccando il parametro u e osservando cosa accade vedendo la situazione "di lato"[1] (figura 12). Si può osservare ora che $|v|$ è effettivamente, come si è detto, la distanza del generico punto P dal cerchio centrale. Qui il nastro risulta attorcigliato di un angolo $u/2$ rispetto alla verticale, dunque la quota z di P risulta essere proprio $v \cos \frac{u}{2}$. Infine, le

[1] O, se si vuole, considerando l'intersezione del nastro con un piano passante per l'origine O perpendicolare al piano xy.

coordinate x e y di P si ricavano facilmente osservando la figura 11:

$$\begin{cases} x = \overline{OP}\cos u = (\overline{OA} + \overline{AP})\cos u = \left(r + v\sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u \\[2ex] y = \overline{OP}\sin u = (\overline{OA} + \overline{AP})\sin u = \left(r + v\sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u \end{cases}$$

che possiamo confrontare con la parametrizzazione (1).

Curiosità

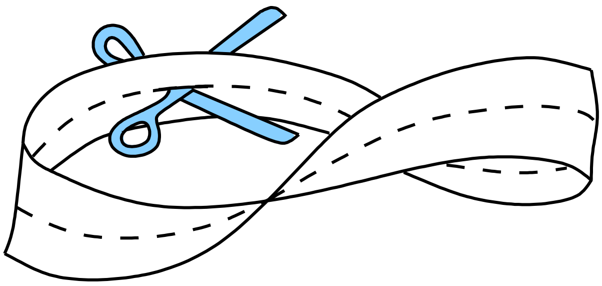
È opinione diffusa ritenere che il nastro di Möbius, data la sua particolare forma, abbia ispirato il simbolo ∞ dell'infinito. In realtà, tale simbolo fu utilizzato per la prima volta dal matematico inglese John Wallis (1616–1703) nel 1655, dunque molto prima della nascita di Möbius.

Esercizi

1. Perché deve essere $r > l$?

2. Provate a completare la figura 11 disegnando la seconda linea del bordo ($v = -1$).

3. Dopo aver costruito un nastro di Möbius di carta, provate a tagliarlo lungo la linea di mezzeria... Sorpresa!

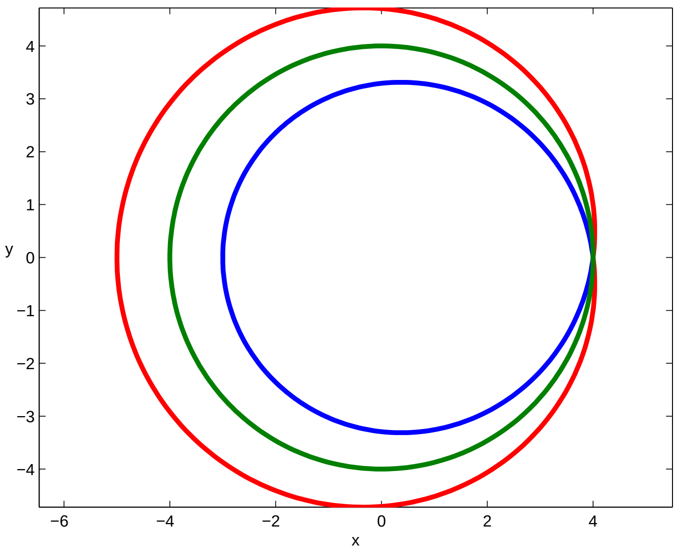


4. Guardate il meraviglioso film *Moebius* di G. Mosquera (1996). Leggete poi il contenuto del sito web `http://www.cinemah.com/neardark/index.php3?idtit=538`

Soluzioni degli esercizi

1. Se la metà della larghezza l fosse maggiore del raggio r del cerchio centrale, il nastro non avrebbe lo spazio sufficiente per attorcigliarsi.

2. Ecco come si presenta la seconda linea del bordo vista dall'alto.



I tre grafici risultano comunque "lisci" (nel senso che ammettono tangente) nel punto $(4, 0)$ di partenza, come si può facilmente verificare valutando le derivate parziali $\partial x/\partial u$ e $\partial y/\partial u$ in $u = 0$.

3. Contrariamente a ciò che si potrebbe pensare, non si ottengono due nastri, bensì un solo nastro attorcigliato due volte, topologicamente equivalente a un cilindro.

4. Per questo non posso aiutarvi...